Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **60 (2005)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 60 (2005) 174 – 179
0013-6018/05/040174-6

© Swiss Mathematical Society, 2005

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2006 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1224: Ist f die Identität, so besitzt die Differentialgleichung

$$y'' + f \circ y = 0 \tag{1}$$

bekanntlich keine Lösung, welche im Intervall $[0, \infty)$ nur positive Werte annimmt. Man zeige, dass für jede für $x > 0$ stetige positive Funktion f mit $\liminf_{x\to\infty} f(x) > 0$ keine Lösung von (1) auf $[0, \infty)$ nur positive Werte annimmt.

Vicenţiu Rădulescu, Craiova, RO

Aufgabe 1225: Für welche Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ mit gleichem Grad $n \geq 3$ und $p \neq q$ gilt $p \circ q = q \circ p$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1226 (Die einfache dritte Aufgabe): Wir betrachten vier Punkte A, B, C, D in allgemeiner Lage im Raum und einen weiteren variablen Punkt X. Mit $|PQRS|$ soll der Inhalt des Tetraeders mit den Eckpunkten P, Q, R, S bezeichnet werden. Die Menge $\mathcal{S}$ bestehe aus allen Punkten X, welche der Bedingung

$$|ABCX|^2 + |BCDX|^2 + |CDAX|^2 + |DABX|^2 = |ABCD|^2$$

genügen. Zeige, dass $\mathcal{S}$ eine Ellipsoidfläche ist, welche die Punkte A, B, C, D enthält und unter allen solchen den kleinsten Rauminhalt umschliesst.

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2004

Aufgabe 1212. Es bezeichnen a, b, c die Seitenlängen, r und ϱ die Längen von Um- und Inkreisradius eines Dreiecks. Zudem sei $T = 2(r - 2\varrho)\sqrt{r(r - 2\varrho)}$. In [1] gab Blundon als schärfste Abschätzung für $a^2 + b^2 + c^2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\lambda_1 r^2 + \lambda_2 \varrho r + \lambda_3 \varrho^2 - \lambda_4 T &\le a^2 + b^2 + c^2 \\ &\le \lambda_1 r^2 + \lambda_2 \varrho r + \lambda_3 \varrho^2 + \lambda_4 T\end{aligned}$$

mit $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = -3$ und $\lambda_4 = 2$. Diese seither oft zitierte Ungleichung ist falsch, was man schnell einsieht, wenn man ein gleichseitiges Dreieck betrachtet. Welches sind die korrekten Werte für λ_1, λ_2, λ_3, λ_4?

Peter Nüesch, Lausanne, CH

[1] Blundon, W.J.: Inequalities Associated with the Triangle. *Canad. Math. Bull.* 8 (1965), 615–626.

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingetroffen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr, (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Mihai Cipu (Bukarest, RO), Oleg Faynsteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Die meisten Einsender verwenden bekannte Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den Grössen r, ϱ und den Dreiecksseiten. Wir folgen der Lösung von *Walter Burgherr:*

Nach einem Resultat von Euler, das von Fuss und Poncelet verallgemeinert wurde, gilt für den Abstand ℓ zwischen dem Umkreismittelpunkt U und dem Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks die Formel

$$\ell^2 = r(r - 2\varrho). \tag{1}$$

(Wenn die Zentren zweier Kreise mit den Radien r und ϱ den Abstand $\ell = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$ haben, so gibt es auch immer Dreiecke, die den kleineren Kreis als Inkreis und den grösseren als Umkreis besitzen; jeder Punkt des grösseren Kreises taugt dabei als Dreiecksecke.)

Als erstes wird nun der Term $a^2 + b^2 + c^2$ für Dreiecke, die bezüglich der Geraden UI symmetrisch liegen, bearbeitet. Anschliessend wird gezeigt, dass die extremalen Summen der Seitenquadrate bei dieser symmetrischen Lage auftreten.

1. Es liege die Ecke A (mit dem Winkel α) auf der Geraden UI, und die Ecken B und C (mit den Winkeln β resp. γ) seien symmetrisch bezüglich UI. Liegt U zwischen A und I, gilt in den folgenden Formeln das obere, liegt U ausserhalb der Strecke AI, gilt das untere Vorzeichen. Man findet leicht

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\varrho}{r \pm \ell}\,.$$

Setzt man für ℓ den Ausdruck aus (1) ein, und rationalisiert den Nenner, so hat man

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{r \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r} &&= \cos(\beta) = \cos(\gamma)\,, \qquad (2)\\
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{r-\varrho \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r} &&= \cos^2(\beta) = \cos^2(\gamma)\,,\\
\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{r+\varrho \pm \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r} &&= \sin^2(\beta) = \sin^2(\gamma)\,,\\
\sin^2(\alpha) = 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{2r\varrho - \varrho^2 \mp 2\varrho\sqrt{r(r-2\varrho)}}{r^2}\,.
\end{aligned}$$

Nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

folgt nun

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4r^2\left(\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)\right)$$

und nach dem Einsetzen der obigen Ausdrücke

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4r^2 + 12r\varrho - 4\varrho^2 \pm 4(r-2\varrho)\sqrt{r(r-2\varrho)}\,. \qquad (3)$$

2. Es wird nun die Summe der Seitenquadrate beim allgemein liegenden Dreieck ABC durch r, ϱ und den halben Umfang s dargestellt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4s^2 - 2(ab + bc + ca)\,.$$

Aus den Flächenformeln

$$F = s\varrho = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r}$$

findet man

$$s\varrho^2 = (s-a)(s-b)(s-c) = s^3 - \overbrace{(a+b+c)}^{2s}s^2 + (ab+bc+ca)s - \overbrace{abc}^{4rs\varrho}$$

und damit

$$ab + bc + ca = s^2 + 4r\varrho + \varrho^2,$$

was schliesslich zur Darstellung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 8r\varrho - 2\varrho^2$$

führt. Der fragliche Term ist also genau dann extremal, wenn s extremal ist.

Der halbe Umfang s wird nun bei gegebenem r und ϱ als Funktion des Winkels α beschrieben:

$$a = 2r\sin(\alpha), \qquad b + c = a + 2\varrho\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

und somit gilt

$$s = 2r\sin(\alpha) + \varrho\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Aus Symmetriegründen wird s für die im ersten Abschnitt berechneten Lagen extremal; dabei handelt es sich um Randextrema. Um innere Extremalstellen zu finden, leitet man ab:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = 2r\cos(\alpha) - \frac{\varrho}{2\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = 2r\cos(\alpha) - \frac{\varrho}{1-\cos(\alpha)}.$$

Für das Verschwinden der Ableitung muss

$$2r\cos^2(\alpha) - 2r\cos(\alpha) + \varrho = 0$$

gelten, was auf

$$\cos(\alpha) = \frac{r \pm \sqrt{r(r-2\varrho)}}{2r}$$

führt. Der Vergleich mit (2), wo für $\cos(\beta)$ dieselben Werte gefunden wurden, zeigt, dass auch hier die Dreiecke in symmetrischer Lage (mit anderer Beschriftung) liegen. Sie allein liefern den maximalen und minimalen Wert.

3. Minimum und Maximum der Summe werden also durch (3) angegeben. Es gilt unter Verwendung der Abkürzung $T = 2(r-2\varrho)\sqrt{r(r-2\varrho)}$

$$4r^2 + 12r\varrho - 4\varrho^2 - 2T \le a^2 + b^2 + c^2 \le 4r^2 + 12r\varrho - 4\varrho^2 + 2T.$$

Die gesuchten Werte sind also $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 2$.

Aufgabe 1213. Es bezeichne S_n die Menge der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jeder Permutation $\sigma \in S_n$ ordnen wir die Zahl

$$d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma(i+1) - \sigma(i))^2$$

zu. Man berechne $a_n = \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 18 Zuschriften eingegangen, nämlich von Ulrich Abel (Wettenberg, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Mihai Cipu (Bukarest, RO), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Volkard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Fritz Siegerist*: Gemäss Definition besteht $d(\sigma)$ aus $n-1$ summierten Differenzquadraten. Weil S_n genau $n!$ Elemente besitzt, summiert sich a_n somit aus $(n-1)\cdot n!$ Differenzquadraten. Letztere können durch ihren Mittelwert m ersetzt werden. Dieser berechnet sich aus den $\binom{n}{2}$ möglichen Differenzquadraten 1^2, $2^2, \ldots, (n-1)^2$, welche mit den Häufigkeiten $n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$ auftreten:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)\cdot i^2}{\binom{n}{2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^3}{\frac{n(n-1)}{2}} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{n^2(n^2-1)^2}{12}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{6}.$$

Bei $(*)$ wurden die bekannten Formeln für Quadrat- und Kubikzahlsummen verwendet. Somit gilt:

$$a_n = n!\cdot(n-1)\cdot m = \frac{(n+1)!\cdot n\cdot(n-1)}{6} = n!\cdot\binom{n+1}{3}.$$

Aufgabe 1214 (Die einfache dritte Aufgabe). Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ nichtverschwindende Zahlen. Zeige, dass die beiden Ausdrücke

$$\sum_{j=1}^{n-1}\big(a_n a_{j+1}(a_1-1) - a_1 a_j (a_n - 1)\big)\cdot\frac{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}{a_j a_{j+1}}$$

und

$$(a_n - a_1)\left(\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell - \sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}{a_j}\right)$$

übereinstimmen.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Mihai Cipu (Bukarest, RO), Aldo Dalla Piazza (Courtelary, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Volkard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die eingesandten Lösungsideen stimmen weitgehend überein. Wir folgen *Frieder Grupp* und *Michael Vowe*: Der Term $\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell$ lässt sich bei beiden Ausdrücken ausklammern und muss deshalb nicht berücksichtigt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} \big(a_n a_{j+1}(a_1-1) - a_1 a_j (a_n-1)\big) \frac{1}{a_j a_{j+1}} \\
&\quad = a_n(a_1-1)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j} - a_1(a_n-1)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_{j+1}} \\
&\quad = a_1 a_n \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right) - a_n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j} + a_1\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_{j+1}} \\
&\quad = a_1 a_n\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right) - a_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} + a_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} \\
&\quad = (a_n-a_1)\left(1-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right).
\end{aligned}$$