Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 62 (2007)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 62 (2007) 40 – 43
0013-6018/07/010040-4

© Swiss Mathematical Society, 2007

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2007 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1239: Im Restklassenring $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ mit Addition und Multiplikation modulo 9 bestimme man alle Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}$ der Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

man löse also die Kongruenz $\mathcal{A}\vec{u} \equiv \lambda\vec{u} \pmod 9$.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1240: Es sei $x \geq 2$ eine reelle Zahl, $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ und $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\leq x$.
Beweise:

$$\pi(x) = \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{n}{k} \right\rfloor \right)} \right\rfloor.$$

Harald Merk, Biberach, D

Aufgabe 1241 (Die einfache dritte Aufgabe): Wann erscheint in der geometrischen Folge 1, 2, 4, 8, 16, ... zum ersten Mal eine Zahl mit einer 9 am Anfang?

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2006

Aufgabe 1227. Ein dünner homogener Draht umrandet einen Kreissektor vom Radius ϱ und Zentriwinkel α. Er habe seinen Scheitel im Koordinatenursprung, und ein Schenkel liege auf der positiven x-Achse. Welche Kurve beschreibt der Massenschwerpunkt, wenn α im Intervall $(0, 2\pi)$ variiert, und für welches α_0 liegt der Massenschwerpunkt im Koordinatenursprung?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Wir verfolgen zwei verschiedene Lösungen, zuerst jene von *Harald Merk*: Der Kreissektor besteht aus einem Schenkel T_1 auf der positiven x-Achse, einem weiteren Schenkel T_2 und einem Kreisbogen T_3. Die Punkte $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, $S_3(x_3, y_3)$ seien die Massenschwerpunkte von T_1, T_2 und T_3, und der Punkt $S(x_s, y_s)$ sei der Massenschwerpunkt des Kreissektors.

Offenbar ist $x_1 = \frac{\varrho}{2}$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{\varrho}{2} \cdot \cos(\alpha)$ und $y_2 = \frac{\varrho}{2} \cdot \sin(\alpha)$.

Weiter gilt

$$x_3 = \frac{1}{\varrho \cdot \alpha} \int_0^\alpha \varrho^2 \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\varrho}{\alpha} \cdot \sin(\alpha),$$
$$y_3 = \frac{1}{\varrho \cdot \alpha} \int_0^\alpha \varrho^2 \sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\varrho}{\alpha} \cdot (1 - \cos(\alpha)).$$

Aus

$$x_s = \frac{\varrho \cdot x_1 + \varrho \cdot x_2 + \varrho \cdot \alpha \cdot x_3}{\varrho + \varrho + \varrho \cdot \alpha} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\varrho \cdot y_1 + \varrho \cdot y_2 + \varrho \cdot \alpha \cdot y_3}{\varrho + \varrho + \varrho \cdot \alpha}$$

erhalten wir nach einfacher trigonometrischer Umformung für die gesuchte Kurve die Parameterdarstellung

$$x_s = \varrho \cdot \frac{\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + 2\sin(\alpha/2))}{2 + \alpha},$$
$$y_s = \varrho \cdot \frac{\sin(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + 2\sin(\alpha/2))}{2 + \alpha}.$$

Für $\varrho = 2$ erhält man den in Figur 1 gezeigten Graphen.

Aus der Parameterdarstellung ist ersichtlich, dass der zu $\cos(\alpha_0/2) + 2\sin(\alpha_0/2) = 0$, also zu $\tan(\alpha_0/2) = -\frac{1}{2}$ gehörige Kurvenpunkt der Ursprung ist. Er entspricht dem Winkel $\alpha_0 \approx 306.87°$.

Gerhard Wanner verwendet klassische Methoden: Wir setzen $\varrho = 1$. Der Massenschwerpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden des Sektors; deshalb setzen wir $\varphi = \alpha/2$. Um Integrale zu vermeiden, benützen wir die Guldinsche Regel: Wir stellen die Figur senkrecht

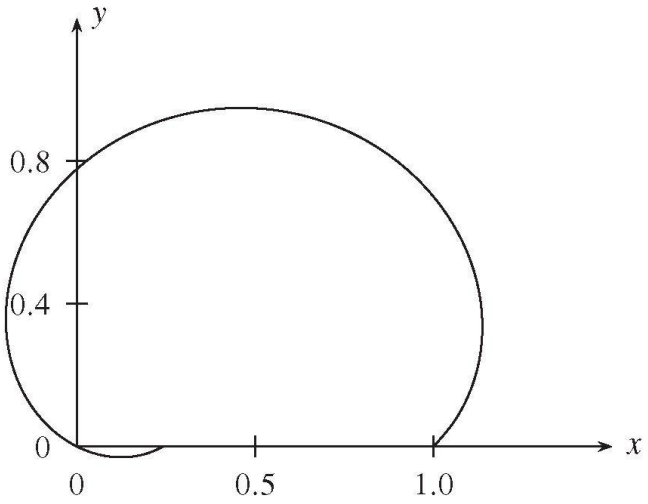

Fig. 1

und lassen sie um die x-Achse rotieren. Die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers besteht dann aus zwei Kegelmantelflächen, von denen jede die Oberfläche $\pi \cdot \cos(\varphi)$ besitzt, und einer Zone der Kugeloberfläche; diese hat nach Archimedes dieselbe Fläche wie der angrenzende Rotationszylinder, also $4\pi \cdot \sin(\varphi)$. Somit beträgt die gesamte Oberfläche $2\pi(\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi))$. Weil der Umfang der ganzen Figur $2 + 2\varphi$ ist, folgt nach Guldin für den Abstand des Schwerpunktes

$$r = \frac{\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)}{2 + 2\varphi}.$$

Aufgabe 1228. Eine Folge ganzer Zahlen sei durch die Anfangswerte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = c^2$ und die Rekursion

$$a_n = (c^2 + d)a_{n-1} + d(c^2 + d)a_{n-2} - d^3 a_{n-3} \qquad (c, d \in \mathbb{Z},\ n \geq 3)$$

definiert. Man beweise, dass alle Folgenglieder perfekte Quadrate sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 14 Löser haben Zuschriften eingesandt: Gheorghe Bercea (München, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D) [mit Verallgemeinerung], Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Rudolf Suter (Bonn, D) [3 Lösungen, teils mit Verallgemeinerung], Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Ein Grossteil der Löser argumentiert wie *Stefan Grieder*: Im Fall $d = 0$ hat man die Folge $0, 1, c^2, c^4, \ldots$, welche offensichtlich aus Quadratzahlen besteht. Es sei deshalb im Folgenden $d \neq 0$. Weiter sei $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und

$$b_n = c \cdot b_{n-1} + d \cdot b_{n-2} \qquad (n \geq 2). \tag{1}$$

Wir behaupten, dass dann $a_n = b_n^2$ gilt.

Den Beweis führen wir induktiv:

Zunächst folgt aus (1), dass $b_2 = c$ gilt, und die Behauptung ist deshalb für $n \leq 2$ verankert. Es sei nun $n \geq 3$. Wir setzen voraus, dass $a_\ell = b_\ell^2$ für $\ell < n$.

Aus der Rekursion für a_n und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$a_n = (c^2 + d)b_{n-1}^2 + d(c^2 + d)b_{n-2}^2 - d^3 b_{n-3}^2. \tag{2}$$

Löst man die Rekursion

$$b_{n-1} = c \cdot b_{n-2} + d \cdot b_{n-3} \qquad (n \geq 3) \tag{1'}$$

nach b_{n-3} auf, so ergibt sich $b_{n-3} = \frac{1}{d} \cdot b_{n-1} - \frac{c}{d} \cdot b_{n-2}$ und daraus

$$d^3 \cdot b_{n-3}^2 = d \cdot b_{n-1}^2 - 2cd \cdot b_{n-1}b_{n-2} + c^2 d \cdot b_{n-2}^2. \tag{3}$$

Setzt man (3) in (2) ein, so ergibt sich

$$a_n = c^2 \cdot b_{n-1}^2 + 2cd \cdot b_{n-1}b_{n-2} + d^2 \cdot b_{n-2}^2 = (c \cdot b_{n-1} + d \cdot b_{n-2})^2 \overset{(1)}{=} b_n^2,$$

womit der Beweis geführt ist.

Walter Burgherr, *Frieder Grupp* und *Fritz Siegerist* finden für a_n eine explizite Darstellung:

$$a_n = \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-\ell-1}{\ell} d^\ell c^{n-1-2\ell} \right)^2.$$

Aufgabe 1229 (Die einfache dritte Aufgabe). In der (reellen euklidischen) Ebene seien $n \geq 3$ Punkte in allgemeiner Lage gegeben. Diese Punkte bestimmen $\binom{n}{3}$ Dreiecke und $3\binom{n}{3}$ Winkel. Wie viele dieser Winkel sind mindestens verschieden?

Hanfried Lenz, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Zuschriften eingegangen: Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Walther Janous und *Stefan Grieder* argumentieren wie folgt: Es sind mindestens $n - 2$ Winkel voneinander verschieden. Es gibt zwei Punkte A_1 und A_2 so, dass die übrigen $n - 2$ Punkte alle auf derselben Seite der Geraden A_1A_2 liegen. Dann sind die $n - 2$ Winkel $A_1A_2A_\ell$ $(3 \leq \ell \leq n - 2)$ alle voneinander verschieden, weil keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Bilden die n Punkte die Ecken eines regulären n-Ecks, so treten nur die $n - 2$ Winkel $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\cdot\pi}{n}, \frac{3\cdot\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-2)\cdot\pi}{n}$ auf. Damit ist eine Konfiguration gefunden, bei welcher genau $n - 2$ verschiedene Winkel auftreten.

Nachtrag: In den Löserlisten der drei Aufgaben aus Heft 4, 2006 ist Walther Janous vergessen gegangen.