Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 62 (2007)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 62 (2007) 122 – 126
0013-6018/07/030122-5

© Swiss Mathematical Society, 2007

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2008 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1245: Beweise, dass für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und positive Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$(xy)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} + (yz)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} + (zx)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Aufgabe 1246: Welches ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, dass, wenn man die letzte Ziffer an den Anfang transferiert, die neue Zahl ein echtes Vielfaches der ursprünglichen ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Aufgabe 1247 (Die einfache dritte Aufgabe): In seinen „52 Wanderungen“ beschreibt Franz Hohler einen Rundgang um den Pfäffikersee und wie er dabei verschiedenen anderen Rundgängern ein zweites Mal begegnet. Für diese Aufgabe treffen wir die folgenden vereinfachenden Annahmen: Wanderer kommen zu „zufälligen“ (gemeint ist: gleichverteilten) Zeiten an „zufälligen“ Orten an den See, gehen einmal herum und verschwinden dann wieder. Jeder Rundgänger hat seine eigene konstante Geschwindigkeit. Zeige: Höchstens 25% der Leute, die Franz Hohler auf seinem Rundgang kreuzt, kreuzt er in diesem Moment zum zweiten Mal.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2006

Aufgabe 1233. Es sei p eine Primzahl der Form $p = 3n - 1$ $(n \geq 2)$. Im endlichen Körper $GF(p)$ betrachten wir die Gleichung $a^3 + b^3 \equiv c^3 \pmod{p}$. Besitzt sie Lösungen in $GF(p) \setminus \{0\}$? Wie lautet die Antwort für die Primzahlen $p = 13$, 19 und 1291, welche von der Form $p = 3n + 1$ sind?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 18 Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Harald Fripertinger (Graz, A), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH). Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Hans-Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Wir folgen *Hans-Heiner Storrer*: Ist $p = 3n - 1$, $(n \geq 2)$, so ist jedes Element von $GF(p) \setminus \{0\}$ eine dritte Potenz, somit gibt es immer Lösungen der Kongruenz

$$a^3 + b^3 \equiv c^3 \pmod{p} \tag{1}$$

mit a, b, c, die alle nicht kongruent zu 0 modulo p sind.

Um nachzuweisen, dass tatsächlich jedes Element von $GF(p) \setminus \{0\}$ eine dritte Potenz ist, wählen wir eine Primitivwurzel g modulo p. Jedes Element x von $GF(p) \setminus \{0\}$ hat dann die Form $x = g^r$ für ein r mit $0 \leq r < p - 1$. Da 3 und $p - 2 = 3n - 2$ teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen s und t mit $3s + (p-1)t = r$. Es folgt $x = g^r = g^{3s} \cdot (g^{p-1})^t = (g^s)^3$, denn $g^{p-1} = 1$, und somit ist x eine dritte Potenz.

Für die drei in der Aufgabenstellung genannten Primzahlen gilt: Die Kongruenz (1) hat für $p = 19$ und $p = 1291$ Lösungen, beispielsweise $1^3 + 4^3 \equiv 2^3 \pmod{19}$ bzw. $1^3 + 16^3 \equiv 21^3 \pmod{1291}$, nicht aber für $p = 13$. Die von Null verschiedenen Kuben modulo 13 sind nämlich kongruent zu 1, 5, 8 oder 12. Man sieht deshalb sofort, dass in $GF(13) \setminus \{0\}$ die Summe zweier Kuben kein Kubus sein kann.

Wir behaupten allgemeiner, dass (1) für alle ungeraden Primzahlen mit Ausnahme der Glücksprimzahl 7 und der Unglücksprimzahl 13 lösbar ist.

Zunächst stellt man fest, dass die Gleichung für $p = 2$ (bzw. $p = 3$) trivialerweise unlösbar (bzw. lösbar) ist. Ferner ist sie auch für $p = 7$ unlösbar, denn die von Null verschiedenen Kuben modulo 7 sind 1 und 6.

Die Existenz von Lösungen für alle Primzahlen der Form $p = 3n + 1$ mit $p \geq 19$ folgt aus einem Resultat von Libri und Lebesgue, welches besagt, dass die Anzahl N der Lösungen der Gleichung $x^3 - y^3 = 1$ in $GF(p)$ $(p = 3n+1)$ gegeben ist durch $N = p + \lambda - 2$. Dabei ist λ eindeutig bestimmt durch die Beziehungen $4p = \lambda^2 + 27\mu^2$ und $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$. ($\lambda$ kann positiv oder negativ sein.) Siehe [1]. Für $p = 7$ bzw. $p = 13$ ist $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = -5$. Somit wird in beiden Fällen $N = 6$. Nun hat aber jedes Element von $GF(p) \setminus \{0\}$, das eine dritte Potenz ist, drei verschiedene dritte Wurzeln. Insbesondere gibt es drei dritte

Einheitswurzeln $z_1 = 1, z_2, z_3$ mit $z_i^3 = 1$. Dies liefert bereits die $N = 6$ Lösungen $z_i^3 - 0^3 = 1, 0^3 - (-z_i)^3 = 1$, in Übereinstimmung damit, dass es für $p = 7$ und $p = 13$ keine Lösungen der in der Aufgabe gesuchten Form gibt. Für alle anderen p der Form $p = 3n + 1$ ist aber, wie man leicht nachprüft, $N > 6$, so dass es wie behauptet Lösungen der Gleichung in $GF(p) \setminus \{0\}$ gibt.

[1] Chowla, S.; Cowles, M.; Cowles, J.: On the difference of cubes (mod p). *Acta Arith.* 37 (1980), 61–65.

Aufgabe 1234. Ein Dreieck mit den Seiten $a \le b \le c$ besitze den Inkreisradius ϱ und den Umkreisradius r. Beweise:

$$a + b - c \le 2\varrho\sqrt{3} \tag{1}$$

$$2\varrho\sqrt{3} \le b + c - a < 4r \tag{2}$$

$$2\varrho < c + a - b \le 2r \tag{3}$$

Stanley Rabinowitz, Chelmsford, USA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 17 Lösungen eingegangen, nämlich von Šefket Arslanagić (Sarajevo, BA), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hongkong, CN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Die meisten Einsender argumentieren wie *Stefan Grieder*: Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$, und berührt der Inkreis die Seiten a, b, c in den Punkten X, Y, Z, so gilt bekanntlich

$$AY = AZ = \frac{b + c - a}{2}, \quad BZ = BX = \frac{c + a - b}{2}, \quad CX = CY = \frac{a + b - c}{2}.$$

Wegen $\dfrac{\varrho}{CX} = \tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$ und $\gamma \ge \dfrac{\pi}{3}$ gilt

$$\frac{2\varrho}{a + b - c} = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \ge \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und daraus folgt (1).

Wegen $\dfrac{\varrho}{AY} = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ und $\alpha \le \dfrac{\pi}{3}$ gilt

$$\frac{2\varrho}{b + c - a} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und daraus folgt die linke Seite von (2).

Wegen $\frac{\varrho}{BZ} = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$ und $\beta < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\frac{2\varrho}{c+a-b} = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

und daraus folgt die linke Seite von (3).

Aus $AY < c \leq 2r$ folgt die rechte Seite von (2), und die rechte Seite von (3) folgt aus $BZ \leq \frac{c}{2} \leq r$.

Aus den Ausführungen folgert man mühelos, dass die Gleichheit in (1) und (2) nur im gleichseitigen Dreieck gilt, während die Gleichheit in (3) nur im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck gilt.

Aufgabe 1235 (Die einfache dritte Aufgabe). Eine Sehne der konstanten Länge ℓ gleitet entlang der Parabel $p : y = ax^2$. Dabei durchläuft der Sehnenmittelpunkt eine Kurve k. Schliesst diese mit der Parabel p einen endlichen Flächeninhalt ein?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 20 Lösern eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Oleh Faynshteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Ignace Morand (Préverenges, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Wir folgen *Frieder Grupp*: Wir nehmen o.B.d.A an, dass $a > 0$. Es bezeichne $(x, y(x))$ den Sehnenmittelpunkt, $(x-\delta, a(x-\delta)^2)$ den linken Endpunkt der Sehne und $(x+\delta, a(x+\delta)^2)$ den rechten Endpunkt der Sehne. Dann gilt

$$(2\delta)^2 + \left(a(x+\delta)^2 - a(x-\delta)^2\right)^2 = \ell^2,$$

und hieraus folgt

$$\delta^2 = \frac{\ell^2}{4 + (4ax)^2}.$$

Nun ist

$$y(x) = \frac{a(x-\delta)^2 + a(x+\delta)^2}{2} = ax^2 + a\delta^2,$$

also bewegt sich der Mittelpunkt auf der Kurve mit der Gleichung

$$y(x) = ax^2 + \frac{a\ell^2}{4 + (4ax)^2}.$$

Der gesuchte Flächeninhalt berechnet sich demnach als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\ell^2}{4+(4ax)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi\ell^2}{8}.$$

Er ist also endlich; bemerkenswert ist, dass er nicht von a abhängt.

Korrigendum

In die Lösung zu Aufgabe 1232 (Heft 2, 2007) hat sich ein Fehler eingeschlichen. Die letzten vier Formelzeilen lauten korrekt:

$$\begin{aligned}
&= 2\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha-\beta)+1-2\sin^2\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\leq 2\left|\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\right|+1-2\sin^2\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{3}{2}-2\left(\left|\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{1}{2}\right)^2\\
&\leq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$