In Dreiecken einbeschriebene Dreiecke

Autor(en): **Blatter, Christian**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **63 (2008)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-99058

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 63 (2008) 18 – 22
0013-6018/08/010018-5

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

In Dreiecken einbeschriebene Dreiecke

Christian Blatter

Christian Blatter hat an der Universität Basel studiert. Von 1962 bis 1964 war er Visiting Assistant Professor an der Stanford University. Anschliessend wurde er an die ETH Zürich gewählt und wirkte dort bis zu seiner Emeritierung im Herbst 2000.

1 Die Dreieckskonfiguration $\mathcal{K}$ der Figur 1 hat Anlass zu unzähligen geometrischen Ungleichungen gegeben; siehe dazu [1] und [3]. Ein Beispiel ist die Ungleichung

$$F_0 \geq \min(F_1, F_2, F_3)\,, \tag{1}$$

wobei F_i den Flächeninhalt des Teildreiecks Δ_i bezeichnet. Gedruckt ist sie zum ersten Mal in dieser Zeitschrift erschienen, als Aufgabe von H. Debrunner [6]. In [7] und [5] werden sowohl (1) wie die analoge Ungleichung

$$U_0 \geq \min(U_1, U_2, U_3)$$

für die Umfänge U_i der Δ_i mit P. Erdös und E. Trost in Verbindung gebracht.

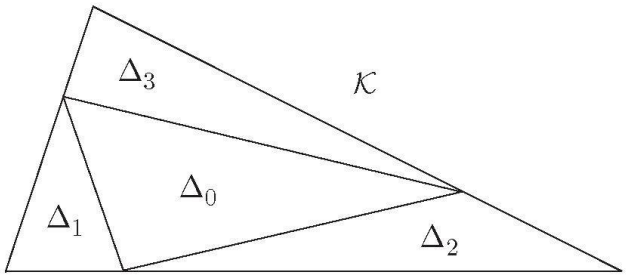
Wie dem auch sei: In der jüngst erschienenen Arbeit [2] hat W. Janous die Ungleichung (1) zum Anlass genommen, um nach der besten Ungleichung vom Typ

$$F_0 \geq M_p(F_1, F_2, F_3) \tag{2}$$

zu fragen. Hier bezeichnet

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) := \Big(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\Big)^{1/p}\,, \qquad -\infty \leq p \leq \infty\,,$$

Wählt man auf jeder Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt und verbindet die drei Punkte untereinander, so entstehen vier Teildreiecke. Gemäss einer Erdös und Debrunner zugeschriebenen Ungleichung kann das zentrale Teildreieck Δ_0 nicht das flächenkleinste der vier sein. Seither haben verschiedene Autoren dieses Resultat verschärft. Auf den folgenden Seiten wird die Vermutung von Janous bewiesen, dass F_0 mindestens gleich dem p-Mittel von F_1, F_2, F_3 ist, wobei $p := -\log(3/2)/\log 2$ den bestmöglichen Wert für eine derartige Ungleichung darstellt.



Figur 1

das *p-Potenzmittel* der n positiven Zahlen x_i. Die Funktion $p \mapsto M_p(x_1, \ldots, x_n)$ ist (schwach) monoton wachsend. Für die speziellen Werte $p := -\infty$, 0 und ∞ liefert sie (via einen Grenzübergang) bzw. das Minimum, das geometrische Mittel und das Maximum der x_i. Auf Grund von (1) haben wir also

$$F_0 \geq M_{-\infty}(F_1, F_2, F_3)\,.$$

2 Janous beweist $F_0 \geq M_{-1}(F_1, F_2, F_3)$ (harmonisches Mittel) und zeigt durch ein Gegenbeispiel, dass (2) für $p > -\log(3/2)/\log 2$ nicht mehr allgemein richtig ist. Die „bestmögliche" Ungleichung von diesem Typ wäre also

$$F_0 \geq M_{-q}(F_1, F_2, F_3)\,, \qquad q := \frac{\log(3/2)}{\log 2} \doteq 0.58496\,. \tag{3}$$

Die Arbeit von Janous schliesst mit der Vermutung, dass (3) tatsächlich zutrifft. Diese Vermutung soll in der vorliegenden Note bewiesen werden.

Wir setzen zur Abkürzung $F_0/F_i =: x_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Die behauptete Ungleichung (3) ist dann äquivalent mit

$$x_1^q + x_2^q + x_3^q \geq 3. \tag{4}$$

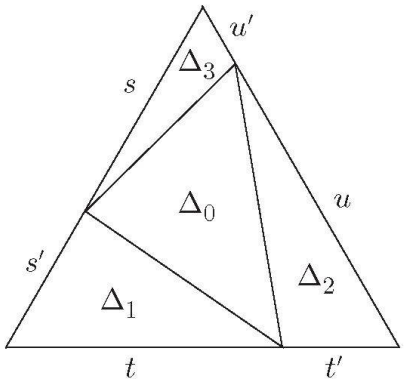
3 Die „definitive" Ungleichung über die F_i stammt von J.F. Rigby [4]: *Die vier Zahlen $F_i \geq 0$ lassen sich genau dann als Teilflächen einer Konfiguration $\mathcal{K}$ auffassen, wenn*

$$F_0^3 + (F_1 + F_2 + F_3)F_0^2 - 4F_1F_2F_3 \geq 0 \tag{5}$$

ist, und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die drei Verbindungsgeraden von je zwei Gegenecken durch einen Punkt gehen.

Wir beweisen hier nur einen Teil des Satzes von Rigby, nämlich die Ungleichung (5) für erwiesene Teilflächen F_i. Dabei dürfen wir o.B.d.A. von einem gleichseitigen Dreieck Δ der Seitenlänge 1 ausgehen; sein Flächeninhalt beträgt $F = \sqrt{3}/4$. Mit den Bezeichnungen der Figur 2 hat man

$$\begin{aligned} F_0 &= (1 - s't - t'u - u's)F \\ &= \big((s+s')(t+t')(u+u') - s't(u+u') - t'u(s+s') - u's(t+t')\big)F \\ &= (stu + s't'u')F \end{aligned}$$



Figur 2

und folglich

$$F_0^3 + (F_1 + F_2 + F_3)F_0^2 - 4F_1F_2F_3 = F_0^2F - 4F_1F_2F_3 = (stu - s't'u')^2F^3 \geq 0\,,$$

wie behauptet.

Wird (5) ebenfalls durch die Variablen $x_i := F_0/F_i$ ausgedrückt, so resultiert die äquivalente Bedingung

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 4\,. \tag{6}$$

4 Damit stehen wir vor der folgenden Aufgabe: Wir müssen zeigen, dass unter der Nebenbedingung (6) die Ungleichung (4) gilt.

Offensichtlich genügt es, Tripel (x_1, x_2, x_3) der Form $x_1 \geq x_2 \geq x_3 =: y$ zu betrachten, für die in (6) das Gleichheitszeichen steht. Dann ist $0 < y \leq 1$, und man hat

$$(1 + y)x_1x_2 + y(x_1 + x_2) = 4\,. \tag{7}$$

Wir halten $y \in]0, 1]$ zunächst fest und schreiben x_1, x_2 in der Form

$$x_1 := \frac{2}{1+y}\rho\,, \quad x_2 := \frac{2}{1+y}\sigma\,, \tag{8}$$

wobei ρ und σ nach (7) durch

$$\left(\rho + \frac{y}{2}\right)\left(\sigma + \frac{y}{2}\right) = \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 \tag{9}$$

miteinander verknüpft sind. Die Gleichung (9) definiert eine Hyperbel in der (ρ, σ)-Ebene. Wegen $x_1 \geq x_2 \geq y > 0$ genügt es, den in $(1, 1)$ beginnenden und im Punkt (ρ_1, σ_1), $\sigma_1 = \frac{y}{2}(1 + y)$, endenden Hyperbelbogen γ zu betrachten. Es sei daher

$$t \mapsto \big(\rho(t)\,, \sigma(t)\big) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

eine Parameterdarstellung von γ, wobei

$$\rho'(t) > 0\,, \quad \rho(t) \geq \sigma(t) \geq \sigma_1 := \frac{y}{2}(1+y) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

zugrundegelegt wird. Aus (9) folgt

$$\rho'\Big(\sigma + \frac{y}{2}\Big) + \sigma'\Big(\rho + \frac{y}{2}\Big) = 0\,,$$

und damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\rho^q + \sigma^q) = q(\rho^{q-1}\rho' + \sigma^{q-1}\sigma') = \frac{q\rho'}{\rho + y/2}\Big(\rho^{q-1}\Big(\rho + \frac{y}{2}\Big) - \sigma^{q-1}\Big(\sigma + \frac{y}{2}\Big)\Big).$$

Die Funktion $\phi(\tau) := \tau^{q-1}\big(\tau + \frac{y}{2}\big)$ ist im Intervall $\sigma_1 \leq \tau \leq \rho_1$ monoton wachsend, denn dort gilt

$$\phi'(\tau) = \tau^{q-2}\Big(q\tau + (q-1)\frac{y}{2}\Big) \geq \tau^{q-2}\frac{y}{2}\big(q(2+y) - 1\big) \geq 0\,.$$

Dies beweist

$$\frac{d}{dt}(\rho^q + \sigma^q) = \frac{q\rho'}{\rho + y/2}\big(\phi(\rho) - \phi(\sigma)\big) \geq 0\,,$$

woraus wir den Schluss

$$\rho^q(t) + \sigma^q(t) \geq \rho^q(0) + \sigma^q(0) = 2 \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

ziehen dürfen. Mit (8) folgt daher: Ist $x_3 := y$ das kleinste der drei x_i, so gilt

$$x_1^q + x_2^q + x_3^q \geq 2\Big(\frac{2}{1+y}\Big)^q + y^q \qquad (0 < y \leq 1)\,.$$

5 Damit verbleibt zu beweisen, dass die Funktion

$$f(y) := 2\Big(\frac{2}{1+y}\Big)^q + y^q - 3 = 3(1+y)^{-q} + y^q - 3$$

für $0 < y \leq 1$ nichtnegativ ist. Der spezielle Wert von q (es ist $2^q = 3/2$) hat $f(0) = f(1) = 0$ zur Folge, mit verschiedener Qualität der zwei Nullstellen, weshalb wir anstelle von f die Funktion

$$g(y) := y^{-q} f(y) = 1 + 3y^{-q}\big((1+y)^{-q} - 1\big)$$

betrachten. Man berechnet

$$\begin{aligned} g'(y) &= -3qy^{-q-1}\big((1+y)^{-q} - 1\big) - 3qy^{-q}(1+y)^{-q-1} \\ &= 3qy^{-q-1}(1+y)^{-q-1}\big((1+y)^{q+1} - (1+2y)\big)\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $\psi(y) := (1+y)^{q+1} - (1+2y)$ ist konvex und verschwindet wegen des speziellen Wertes von q bei $y = 0$ und $y = 1$. Hieraus folgt $\psi(y) \leq 0$ $(0 < y \leq 1)$ und damit $g'(y) \leq 0$ $(0 < y \leq 1)$. Wegen $g(1) = 0$ zieht dies $g(y) \geq 0$ $(0 < y \leq 1)$ und schliesslich $f(y) \geq 0$ $(0 < y \leq 1)$ nach sich. $\square$

Literatur

[1] Bottema, O. et al.: *Geometric inequalities.* Wolters and Noordhoff, Groningen 1969.

[2] Janous, W.: A short note on the Erdös-Debrunner inequality. *Elem. Math.* 61 (2006), 32–35.

[3] Mitrinović, D.S. et al.: *Recent advances in geometric inequalities.* Kluver Acad. Publ., Dordrecht 1989.

[4] Rigby, J.F.: Inequalities concerning the areas obtained when one triangle is inscribed in another. *Math. Mag.* 45 (1972), 113–116.

[5] Szekeres, E.: Einfache Beweise zweier Dreieckssätze. *Elem. Math.* 22 (1967), 17–18.

[6] Aufgabe 260. *Elem. Math.* 11 (1956), 20.

[7] Solution to problem 4908. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 386–387.

Christian Blatter
Albertus-Walder-Weg 16
CH-8606 Greifensee, Schweiz
e-mail: `christian.blatter@math.ethz.ch`