Erdös-Mordell-type inequalities

Autor(en): **Lu, Zhiqin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **63 (2008)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-99059

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 63 (2008) 23 – 24
0013-6018/08/010023-2

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

Erdös-Mordell-type inequalities[1]

Zhiqin Lu

Zhiqin Lu graduated from the Courant Institute of New York University in 1997. He was a Ritt Assistant Professor at Columbia University before joining the faculty of the University of California at Irvine in 2000. His field of research is differential geometry.

The famous Erdös-Mordell inequality states that, if P is a point in the interior of a triangle ABC whose distances are p, q, r from the vertices of the triangle and x, y, z from its sides, then

$$p + q + r \geq 2(x + y + z).$$

In the paper by Satnoianu [1], some generalizations of the above inequality were given. His proof depends heavily on the geometry of the triangle ABC. In this note, we give a more algebraic proof of the Erdös-Mordell inequality.

Theorem. *Let $p, q, r \geq 0$ and let $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Then we have the inequality*

$$p + q + r \geq 2\sqrt{qr}\cos\alpha + 2\sqrt{rp}\cos\beta + 2\sqrt{pq}\cos\gamma\,. \tag{1}$$

Proof. We consider the following quadratic function of x:

$$x^2 - 2(\sqrt{r}\cos\beta + \sqrt{q}\cos\gamma)x + q + r - 2\sqrt{qr}\cos\alpha. \tag{2}$$

Then a quarter of the discriminant is

$$\frac{1}{4}\Delta = (\sqrt{r}\cos\beta + \sqrt{q}\cos\gamma)^2 - (q + r - 2\sqrt{qr}\cos\alpha).$$

Since $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, we have

$$\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma.$$

[1] Partially supported by the NSF CAREER award DMS-0347033.

Using the above identity, the discriminant can be simplified as

$$\Delta = -(\sqrt{r}\sin\beta - \sqrt{q}\sin\gamma)^2 \leq 0.$$

Thus the expression (2) is always nonnegative. Letting $x = \sqrt{p}$, we get (1). □

Corollary. *Let x', y', z' be the length of the angle bisectors of $\angle BPC$, $\angle CPA$, and $\angle APB$, respectively. Then we have*

$$p + q + r \geq 2(x' + y' + z').$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2qr}{q+r}\cos\gamma \leq \sqrt{qr}\cos\gamma\,, \\ y' &= \frac{2pr}{p+r}\cos\beta \leq \sqrt{pr}\cos\beta\,, \\ z' &= \frac{2pq}{p+q}\cos\alpha \leq \sqrt{pq}\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

The corollary follows from the theorem. □

Remark. Since $x' \geq x$, $y' \geq y$ and $z' \geq z$, the corollary implies the Erdös-Mordell inequality

$$p + q + r \geq 2(x + y + z).$$

References

[1] Satnoianu, R.: Erdös-Mordell-type inequalities in a triangle. *Amer. Math. Monthly* 110 (2003) 8, 727–729.

Zhiqin Lu
Department of Mathematics
University of California Irvine
Irvine, CA 92697, USA
e-mail: `zlu@math.uci.edu`