**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 63 (2008)

**Rubrik:** Aufgaben

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 01.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Elem. Math. 63 (2008) 58 – 62
0013-6018/08/010058-5

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2008 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1251:** Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ positive reelle Zahlen, welche der Bedingung

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$$

genügen. Beweise:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geq n \cdot a_1^{n-1} \cdot a_2^{n-1} \cdot \ldots \cdot a_n^{n-1}. \tag{1}$$

Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für Gleichheit in (1).

Bianca-Teodora Iordache, Craiova, RO

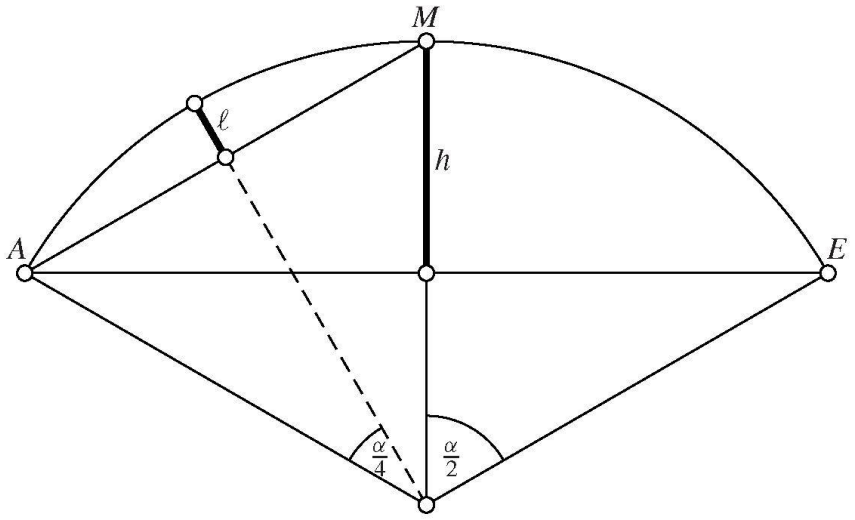
**Aufgabe 1252:** Eine Verallgemeinerung der Fragestellung von Aufgabe 1241, deren Lösung unten zu finden ist:

$f(\ell, n)$ bezeichne die Anzahl der Zahlen $k$ $(1 \leq k \leq n)$, für welche die erste Dezimalziffer von $2^k$ gleich $\ell$ ist. Bestimme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(\ell, n)}{n}$.

Ernst Specker, Zürich, CH

**Aufgabe 1253 (Die einfache dritte Aufgabe):** Im Strassenbau werden Kreisbogen bei grossem Radius oder bei im Gelände unerreichbarem Zentrum mit der sogenannten „Viertelsmethode“ abgesteckt. Der Ingenieur verpflockt Anfangspunkt $A$, Mittelpunkt $M$ und

Endpunkt $E$ des Kreisbogens, und der Polier misst die Höhe $h$ des gleichschenkligen Sehnendreiecks $AME$, um damit $\frac{h}{4}$ über den Mitten der neuen Sehnen $AM$ bzw. $ME$ senkrecht (nach aussen) „neue Kreispunkte" abzustecken. (Mit den neuen Sehnen wird das Verfahren wiederholt, bis das Schnurpolygon die gewünschte Feinheit aufweist.) Wie gross ist beim ersten Verfahrensschritt der radiale Fehler in Abhängigkeit des Zentriwinkels $\alpha$?




Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2007**

**Aufgabe 1239.** Im Restklassenring $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ mit Addition und Multiplikation modulo 9 bestimme man alle Eigenwerte $\lambda$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}$ der Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

man löse also die Kongruenz $\mathcal{A}\vec{u} \equiv \lambda\vec{u} \pmod 9$.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 15 Lösungen eingegangen: Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Felix Günther (Berlin, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Diego Rattaggi (Luzern, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Wir folgen *Peter Bundschuh*: Es ist klar, dass die Kongruenz

$$\mathcal{A}\vec{u} \equiv \lambda\vec{u} \pmod 9 \tag{1}$$

für die $\lambda$ mit $3 \nmid \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ lediglich die triviale Lösung $\vec{u} \equiv \vec{0} \pmod 9$ besitzt. Wegen $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \equiv -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda - 18) \equiv -\lambda^3 \pmod 3$ kommen nur $\lambda \equiv 0, \pm 3 \pmod 9$ als Eigenwerte von $\mathcal{A}$ in Frage.

Mit $\vec{u} = {}^t(x, y, z)$ schreibt sich (1) im Fall $\lambda \equiv 0 \pmod 9$ als

$$\left| \begin{array}{rcrcrcll} & & y & + & 2z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ 3x & + & 4y & - & 4z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ -3x & - & 2y & - & z & \equiv & 0 & \pmod 9 \end{array} \right| .$$

Hier ist die erste Kongruenz mit $y \equiv -2z \pmod 9$ äquivalent, und jede der beiden anderen dann mit $3x \equiv 3z \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv z \pmod 3$. Also ist $\lambda \equiv 0 \pmod 9$ Eigenwert von $\mathcal{A}$, und

$${}^t(z, -2z, z), \quad {}^t(z+3, -2z, z), \quad {}^t(z-3, -2z, z)$$

sind für jedes $z$ die zugehörigen Eigenvektoren, wobei bei $z \equiv 0 \pmod 9$ der erste Vektor auszulassen ist.

Der Fall $\lambda \equiv 3 \pmod 9$ führt zum Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & y & + & 2z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ 3x & + & y & - & 4z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ -3x & - & 2y & - & 4z & \equiv & 0 & \pmod 9 \end{array} \right| .$$

Ersetzt man die dritte Gleichung durch die Summe der zweiten und der dritten, erhält man $y \equiv z \pmod 9$, und die erste und die zweite Gleichung sind dann je äquivalent mit $3x \equiv 3z \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv z \pmod 3$. Somit ist $\lambda \equiv 3 \pmod 9$ Eigenwert von $\mathcal{A}$, und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$${}^t(z, z, z), \quad {}^t(z+3, z, z), \quad {}^t(z-3, z, z).$$

Schliesslich führt $\lambda \equiv -3 \pmod 9$ auf das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcrcrcll} 3x & + & y & + & 2z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ 3x & - & 2y & - & 4z & \equiv & 0 & \pmod 9 \\ -3x & - & 2y & + & 2z & \equiv & 0 & \pmod 9 \end{array} \right| .$$

Ersetzt man die dritte Gleichung durch die Summe der zweiten und der dritten, erhält man $y \equiv 4z \pmod 9$, und die erste und die zweite Gleichung sind dann je äquivalent mit $3x \equiv -6z \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv -2z \pmod 3$. Somit ist $\lambda \equiv -3 \pmod 9$ Eigenwert von $\mathcal{A}$, und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$${}^t(-2z, 4z, z), \quad {}^t(-2z+3, 4z, z), \quad {}^t(-2z-3, 4z, z).$$

In den Fällen $\lambda \equiv \pm 3 \pmod 9$ ist für $z \equiv 0 \pmod 9$ der erste Vektor auszulassen, so dass man also in beiden Fällen 26 Eigenvektoren hat, genau wie im Fall $\lambda \equiv 0 \pmod 9$; einige der Eigenvektoren treten allerdings bei verschiedenen Eigenvektoren auf. Insgesamt hat man 62 verschiedene Eigenvektoren.

**Aufgabe 1240.** Es sei $x \geq 2$ eine reelle Zahl, $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ und $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\leq x$.

Beweise:

$$\pi(x) = \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{n}{k} \right\rfloor \right)} \right\rfloor$$

Harald Merk, Biberach, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** 20 Löser haben Zuschriften eingesandt: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Andrea Clivio (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Felix Günther (Berlin, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau, (Hongkong, CN), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Edmund Swylan (Riga, LV), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Ein Grossteil der Löser argumentiert wie *Albert Stadler*: Man stellt fest, dass

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{n}{k} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \mid n \\ -1, & \text{falls } k \nmid n \end{cases}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{n}{k} \right\rfloor \right) = -n + \tau(n),$$

wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von $n$ bezeichnet.

Also ist $n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{n}{k} \right\rfloor \right)$ gleich 1, wenn $n$ eine Primzahl ist und grösser als 1, wenn $n$ keine Primzahl ist. Damit ist jeder Summand in der Summe der Aufgabenstellung entweder 0 oder 1, und er ist genau dann 1, wenn $n$ eine Primzahl ist.

**Aufgabe 1241 (Die einfache dritte Aufgabe).** Wann erscheint in der geometrischen Folge 1, 2, 4, 8, 16, ... zum ersten Mal eine Zahl mit einer 9 am Anfang?

Christian Blatter, Greifensee, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 20 Zuschriften eingegangen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (St-Aubin-Sauges, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Felix Günther (Berlin, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Edmund Swylan (Riga, LV), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Lösungen enthalten einen hohen experimentellen Anteil. Wir folgen *Albert Ghenzi*: Die geometrische Folge 1, 2, 4, 8, 16, ... kann durch den Ausdruck

$$2^{10m+n} \tag{1}$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $n = 0, 1, \ldots, 9$ beschrieben werden. Dieser Audruck (1) schreibt sich

$$\begin{aligned} 2^{10m+n} &= 2^{10m} \cdot 10^{-3m} \cdot 10^{3m} \cdot 2^n \\ &= (2^{10} \cdot 10^{-3})^m \cdot 10^{3m} \cdot 2^n \\ &= (1.024)^m \cdot 10^{3m} \cdot 2^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Der Anteil

$$10^{3m} \cdot 2^n \tag{3}$$

hat für $n = 0, 1, \ldots, 9$ für alle $m$ die folgenden Anfangszahlen:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{4} & \underline{8} & \underline{1}6 & \underline{3}2 & \underline{6}4 & \underline{1}28 & \underline{2}56 & \underline{5}12 \\ \text{also} & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 3 & 6 & 1 & 2 & 5\,. \end{array} \tag{4}$$

Eine Anfangsziffer 9 kann somit zum ersten Mal in der Folge (2) nur entstehen durch eine Anfangsziffer 8 in der Folge (3), multipliziert mit dem Faktor $1.024^m$.

Es muss also für $n = 3$ gelten:

$$2^{10m+3} = 1.024^m \cdot 10^{3m} \cdot 8 \geq 10^{3m} \cdot 9.$$

Logarithmieren führt auf

$$m \geq \frac{\log(1.125)}{\log(1.024)} \approx 4.967.$$

Mit der Wahl von $m = 5$ wird die gesuchte Zahl zu

$$2^{10m+3} = 2^{53} \approx 9.007199 \cdot 10^{15}.$$