Flächen mit lauter Nabelpunkten

Autor(en): **Pauly, Arno**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **63 (2008)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-99073

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 63 (2008) 141 – 144
0013-6018/08/030141-4

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

Flächen mit lauter Nabelpunkten

Arno Pauly

Arno Pauly studiert Informatik und Mathematik an der Fernuniversität Hagen und Physik an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg. Sein Informatikstudium hat er im Jahr 2007 mit dem Master abgeschlossen.

Zweck des Folgenden ist ein kurzer Beweis des Satzes, dass jedes *zweimal* stetig differenzierbare Flächenstück im $\mathbb{R}^3$, welches nur aus Nabelpunkten besteht, in einer Ebene oder einer Sphäre enthalten ist. Das Resultat ist bekannt und war Gegenstand einer Arbeit von Philip Hartman [2]. Es hat aber nicht Eingang in die neuere Lehrbuchliteratur gefunden (vgl. [3], Problem auf S. 51), wohl weil der übliche kurze Beweis *dreimalige* stetige Differenzierbarkeit erfordert. Die Frage ist von einigem Interesse, da von ihr die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen im geometrischen Beweis des Satzes von Liouville über konforme Abbildungen des dreidimensionalen Raumes abhängen.

1 Differentialgeometrie der Flächen

Wir erinnern zunächst an einige Grundbegriffe aus der Flächentheorie. Für Einzelheiten sei etwa auf [3] verwiesen. Im Anschluss an Gauß werden wir Flächen $M \subseteq \mathbb{R}^3$ als parametrisiert betrachten. Ein *parametrisiertes Flächenstück* der Klasse C^k ist eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$, deren Differential $Df(u)$ an jeder Stelle $u \in U$ den Rang zwei hat. Dabei ist U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, der *Parameterbereich*

Die Beschreibung von zweidimensionalen Flächen in dreidimensionalen Räumen gehört zu den originären Aufgaben der Differentialgeometrie. Eine wichtige Eigenschaft einer Fläche ist ihre Krümmung. Diese hängt prinzipiell sowohl von dem betrachteten Punkt als auch von der Richtung ab. In diesem Beitrag gibt der Autor einen elementaren Beweis des folgenden Satzes von P. Hartmann aus dem Jahr 1947, dass nämlich eine Fläche in der Ebene oder einer Sphäre enthalten sein muss, falls die Krümmung an jedem Punkt unabhängig von der Richtung ist. Im Unterschied zum wohlbekannten kurzen Beweis dieses Satzes, der dreimalige stetige Differenzierbarkeit erfordert, benötigt der Autor für seinen hier gegebenen elementaren Beweis nur die zweimalige stetige Differenzierbarkeit.

von f. Wir werden im Folgenden f als injektiv voraussetzen, so dass die Parameterwerte $u = (u_1, u_2)$ den Punkten $p \in M = f(U)$ eindeutig entsprechen.

Schreibt man für die partiellen Ableitungen $\partial/\partial u_1$ und $\partial/\partial u_2$ der Kürze halber ∂_1 und ∂_2, dann sind aufgrund der Rangbedingung die Vektoren $\partial_1 f(u)$ und $\partial_2 f(u)$ für jeden Parameterwert u linear unabhängig und spannen die Tangentialebene $T_pM \subseteq \mathbb{R}^3$ der Fläche im Punkt $p = f(u)$ auf. Man erhält den (bis aufs Vorzeichen bestimmten) Einheitsnormalenvektor $\nu(u)$ der Fläche im Punkt p als normiertes Vektorprodukt

$$\nu(u) = \frac{\partial_1 f \times \partial_2 f}{\|\partial_1 f \times \partial_2 f\|}(u).$$

Die Abbildung $\nu : U \to \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $u \in U$ den Normalenvektor $\nu(u)$ zuordnet, heißt die *Gaußabbildung* von f.

Die *Weingartenabbildung* $L_p : T_pM \to T_pM$ der Fläche im Punkt $p = f(u)$ ist definiert als

$$L_p = -(D\nu|_u) \circ (Df|_u)^{-1}.$$

Sie ist ein selbstadjungierter Endomorphismus des zweidimensionalen Vektorraumes $T_pM \subseteq \mathbb{R}^3$. Ihre beiden Eigenwerte sind daher reell. Die Abbildung L_p hat folgende geometrische Bedeutung: Ist $v \in T_pM$ ein Einheitstangentialvektor an die Fläche im Punkt p, dann ist das Skalarprodukt $\langle L_p v, v\rangle$ gleich der Krümmung des *Normalschnittes* der Fläche, den man erhält, wenn man M mit der Ebene schneidet, die den Punkt p enthält und in Richtung der Vektoren $\nu(u)$ und v liegt.

Die verschiedenen Einheitsvektoren $v \in T_pM$ ergeben verschiedene Normalschnitte und damit im allgemeinen auch verschiedene Normalschnittkrümmungen. Als *Hauptkrümmungen* der Fläche im Punkt p bezeichnet man die kleinste und die größte dieser Krümmungen. Es sind dies gerade die beiden Eigenwerte $\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ von L_p. Damit die Weingartenabbildung und die Hauptkrümmungen definiert sind, ist f als differenzierbar von der Klasse C^2 vorauszusetzen.

2 Nabelpunkte

Ein Punkt $p \in M$ heißt ein *Nabelpunkt* (oder *Kreispunkt*) von M, wenn $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ gilt. Bezeichnet man diesen gemeinsamen Wert mit $\kappa(p)$, dann haben also alle Normalschnitte der Fläche im Punkt p dieselbe Krümmung $\kappa(p)$, und die Weingartenabbildung ist ein Vielfaches der Identität: Es gilt $L_p = \kappa(p)\, I$, und damit, wenn man statt $\kappa(p)$ etwas ungenau $\kappa(u)$ schreibt,

$$D\nu(u) = -\kappa(u)\, Df(u). \tag{1}$$

Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun ein Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Sei $M = f(U)$ ein parametrisiertes Flächenstück der Klasse C^2 mit zusammenhängendem Parameterbereich U. Wenn jeder Punkt von M ein Nabelpunkt ist, dann ist M in einer Sphäre oder einer Ebene enthalten.*

Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen, werden gelegentlich als *Nabelflächen* (umbilical surfaces) bezeichnet. Der Satz besagt also, dass jede C^2-Nabelfläche in einer Sphäre oder einer Ebene enthalten ist.

Sowohl der Satz als auch der im Folgenden gegebene Beweis lassen sich ohne weiteres auf den Fall einer n-dimensionalen Fläche der Klasse C^2 im $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ verallgemeinern.

Der wesentliche Punkt des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass die Funktion $\kappa : u \mapsto \kappa(u)$ auf U konstant ist. Ist das nämlich der Fall, dann ergibt sich durch Integration der Gleichung (1)

$$\nu = -\kappa f + c$$

mit einem konstanten Vektor c. Falls $\kappa = 0$, dann ist der Normalenvektor ν konstant. Man erhält für $j = 1, 2$

$$\partial_j \langle f, \nu \rangle = \langle \partial_j f, \nu \rangle = 0$$

und damit die Ebenengleichung $\langle f, \nu \rangle = \text{const}$. Ist aber $\kappa \neq 0$, dann folgt

$$\left\| f - \frac{c}{\kappa} \right\| = \left\| \frac{\nu}{\kappa} \right\| = \frac{1}{|\kappa|},$$

und das ist die Gleichung einer Sphäre. Es bleibt also nur die Konstanz von κ zu beweisen.

Setzt man voraus, dass das Flächenstück sogar differenzierbar von der Klasse C^3 ist, dann ergibt sich die Behauptung wie folgt: Gleichung (1) besagt

$$\partial_1 \nu = -\kappa\, \partial_1 f, \qquad \partial_2 \nu = -\kappa\, \partial_2 f.$$

Wendet man ∂_2 auf die erste, ∂_1 auf die zweite dieser Gleichungen an und setzt mit $\partial_1 \partial_2 \nu = \partial_2 \partial_1 \nu$ die Resultate gleich, dann ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$, dass $\partial_1 \kappa = \partial_2 \kappa = 0$ ist. Also ist κ konstant. Das Argument versagt, wenn f nur von der Klasse C^2 ist.

3 Beweis des Satzes

Es genügt, zu zeigen, dass jeder Punkt $p_0 \in M$ eine Umgebung in M besitzt, die in einer Ebene oder einer Sphäre enthalten ist. Hinreichend kleine Umgebungen lassen sich nach Monge als Graph einer Funktion über der Tangentialebene in p_0 parametrisieren. Man kann daher annehmen, dass f die Gestalt

$$f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, h(u_1, u_2))$$

hat mit einer zweimal stetig differenzierbaren reellen Funktion h. Dann ist

$$Df = (\partial_1 f, \partial_2 f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{pmatrix}$$

und die Gaußabbildung

$$\nu = \frac{\partial_1 f \times \partial_2 f}{||\partial_1 f \times \partial_2 f||} = -\frac{1}{\gamma}(\partial_1 h, \partial_2 h, 1)$$

mit $\gamma := \sqrt{1 + (\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2}$. Setzt man diese Ausdrücke in die Matrixgleichung (1) ein und vergleicht entsprechende Matrixelemente, dann ergibt sich

$$\partial_1(\partial_1 h/\gamma) = \kappa, \quad \partial_1(\partial_2 h/\gamma) = 0, \quad \partial_2(\partial_2 h/\gamma) = \kappa, \quad \partial_2(\partial_1 h/\gamma) = 0.$$

Die vierte dieser Gleichungen besagt, dass $\partial_1 h/\gamma$ nicht von u_2 abhängt. Es ist also $\partial_1 h/\gamma = a_1(u_1)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion a_1. Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung $\partial_2 h/\gamma = a_2(u_2)$. Die beiden übrigen Gleichungen liefern nun

$$a_1'(u_1) = a_2'(u_2) = \kappa(u_1, u_2),$$

und diese Gleichung zeigt, dass κ weder von u_1 noch von u_2 abhängt, also konstant ist.

4 Bemerkungen

Der Satz geht zurück auf eine der ersten Arbeiten zur Differentialgeometrie der Flächen, Meusniers *Mémoire sur la courbure des surfaces* aus dem Jahre 1776. Das im dritten Abschnitt gegebene Argument findet sich in ähnlicher Form bei Monge ([4, XIX, S. 172–175]), ist aber offenbar in Vergessenheit geraten. Die von Hartman [2] verwendete Methode beruht grob gesprochen darauf, dass es genügt, wenn Integrabilitätsbedingungen der Differentialgeometrie in einem integrierten Sinne erfüllt sind. Hartman hat diesen Gedanken in der Folge systematisch verwendet, um klassische Sätze der Differentialgeometrie unter schwächeren als den üblichen Differenzierbarkeitsbedingungen zu beweisen. Das Thema der Nabelflächen ist von einem anderen Standpunkt erneut aufgegriffen worden. Es geht dabei um die Frage der Stabilität der Aussage des Satzes, genauer darum, ob eine Fläche, deren sämtliche Punkte in einem zu präzisierenden Sinne beinahe Nabelpunkte sind, notwendig nahe bei einer Sphäre liegt. Positive Resultate in dieser Richtung finden sich bei Pogorelov ([5, S. 493]), Reshetnyak [6] und de Lellis und Müller [1]. Als Nebenresultat ergibt sich insbesondere, dass der Satz auch für Flächen der Sobolevklasse $W^{2,2}$ gilt.

Danksagung. Der Autor möchte sich herzlich bei Herrn Prof. Wolfgang Kühnel sowie dem anonymen Gutachter für ihre sehr hilfreichen Kommentare bedanken.

Literatur

[1] de Lellis, C.; Müller, S.: Optimal rigidity estimates for nearly umbilical surfaces. *J. Differential Geom.* 69 (2005), 75–110.

[2] Hartman, P.: Systems of total differential equations and Liouville's theorem on conformal mappings. *Amer. J. Math.* 69 (1947), 327–332.

[3] Kühnel, W.: *Differentialgeometrie.* Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden 2005.

[4] Monge, G.: *Application de l'analyse à la géométrie.* Bernard, Paris 1807.

[5] Pogorelov, A.V.: *Extrinsic geometry of convex surfaces.* Translations of Mathematical Monographs v. 35, American Mathematical Society 1973.

[6] Reshetnyak, Yu.G.: Some estimates for almost umbilical surfaces. *Siberian Math. J.* 9 (1968), 671–682.

Arno Pauly
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
In den Gässlewiesen 3
D–79111 Freiburg
e-mail: `arno.pauly@saturn.uni-freiburg.de`