Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **63 (2008)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 63 (2008) 189 – 193
0013-6018/08/040189-5

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2009 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1260: Unter den natürlichen Zahlen n, deren Dezimalschreibweise aus 174174 Stellen besteht, betrachten wir jene mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine natürliche Zahl $q > 1$, so dass die Dezimaldarstellung von $q \cdot n$ aus jener von n dadurch entsteht, dass man die letzte Ziffer an den Anfang transferiert. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(Beispielsweise besitzt die zwölfstellige Zahl 179487179487 die gewünschte Eigenschaft, denn $4 \cdot \underline{17948717948}7 = 7\underline{17948717948}$.)

Panagiotis Cheilaris, Athen, GR

Aufgabe 1261: Zeige, dass es keine zweimal differenzierbare Funktion f gibt, welche auf $[0, \infty)$ definiert ist und die den Ungleichungen

$$f(x) > 0 \text{ für } x \geq 0, \qquad f(x) \cdot f''(x) + 1 \leq 0 \text{ für } x \geq 0,$$

genügt.

Vicenţiu Rădulescu, Craiova, RO

Aufgabe 1262 (Die einfache dritte Aufgabe): Zwei Gegenkanten eines Tetraeders sind orthogonal, wenn eine bestimmte Beziehung zwischen den Längen der anderen vier Kanten besteht.

a) Finde diese Beziehung.
b) Welche Höchstsymmetrie (grösste Ordnung der Symmetriegruppe) kann ein Tetraeder haben, falls es genau zwei orthogonale Gegenkanten besitzt?

Karl Wirth, Zürich, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2007

Aufgabe 1248. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 2)$. Beweise:

$$\left|1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right|^2 \leq \left(1 + |z|^2 + \frac{2}{n-1}\Re(z)\right)^{n-1}$$

Mihaly Bencze, Brasov, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Lösungen eingetroffen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Meilen, CH).

Die einfachsten Lösungen stammen von *Albert Stadler* und *Friedhelm Götze*, die erkannt haben, dass es sich bei der zu beweisenden Ungleichung um eine Folgerung aus der Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel handelt. Wir benützen folgende Beziehungen:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{\prod\limits_{\ell=1}^{n}\left(z - e^{\frac{2\pi i \ell}{n}}\right)}{z - 1} = \prod_{\ell=1}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2\pi i \ell}{n}}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{\ell=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} = -1. \tag{2}$$

Mit ihnen folgt

$$\begin{aligned}
&\left|1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right|^{\frac{2}{n-1}} \overset{(1)}{=} \prod_{\ell=1}^{n-1}\left|z - e^{\frac{2\pi i \ell}{n}}\right|^{\frac{2}{n-1}} \\
&= \prod_{\ell=1}^{n-1}\left(1 - z \cdot e^{-\frac{2\pi i \ell}{n}} - \overline{z} \cdot e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} + |z|^2\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1 - z \cdot e^{-\frac{2\pi i \ell}{n}} - \overline{z} \cdot e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} + |z|^2}{n-1} \overset{(2)}{=} 1 + |z|^2 + \frac{z + \overline{z}}{n-1} \\
&= 1 + |z|^2 + \frac{2}{n-1}\Re(z).
\end{aligned}$$

In der Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel besteht genau dann Gleichheit, wenn alle an der Mittelbildung beteiligten Zahlen übereinstimmen. Das ist genau dann der Fall, wenn alle $n-1$ Beträge $|z - e^{2\pi i \ell/n}|$ gleich sind, wenn also z in der komplexen Ebene von den $n-1$ Einheitswurzeln $e^{2\pi i \ell/n}$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n-1)$ gleich weit entfernt ist. Für $n = 2$ ist das trivialerweise für alle z erfüllt; für $n = 3$ haben genau die Punkte der reellen Achse die gewünschte Eigenschaft, und für $n \geq 4$ erfüllt einzig $z = 0$ die Abstandsbedingung.

Aufgabe 1249. Mit den Fibonacci-Zahlen $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$ bilden wir im ebenen (x, y)-Gitter einen Streckenzug S_n wie folgt: Wir starten in $(0, 0)$, gehen um f_1 nach oben, um f_2 nach rechts, ..., um f_{2n-1} nach oben und schliesslich um f_{2n} nach rechts. Der Streckenzug S_n, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Endpunkt von S_n begrenzen ein Gitterpolygon P_n. Bestimme die Anzahl i_n der Gitterpunkte im Innern von P_n.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingegangen, nämlich von André Ammann (Yverdon, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Meilen, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Hans Heiner Storrer*: Das Gitterpolygon P_n besteht aus n aneinandergefügten auf der x-Achse stehenden Quadraten $Q_1, \ldots, Q_n$ mit den Seitenlängen f_2, f_4, $f_6, \ldots, f_{2n}$. Für die Anzahl i_n der Gitterpunkte im Innern von P_n gilt die Rekursionsformel

$$i_n = i_{n-1} + (f_{2n-2} - 1) + (f_{2n} - 1)^2, \quad n \geq 2, \tag{3}$$

mit $i_1 = 0$. Beim Anfügen des Quadrates Q_n (mit der Seitenlänge f_{2n}) an P_{n-1} kommen nämlich die $(f_{2n} - 1)^2$ Punkte im Innern von Q_n sowie die $f_{2n-2} - 1$ Punkte an der gemeinsamen Begrenzungslinie von Q_{n-1} und Q_n hinzu. Die ersten Werte sind $i_1 = 0$, $i_2 = 4$, $i_3 = 55$.

Eine explizitere Formel, in der allerdings immer noch die Fibonacci-Zahlen vorkommen, ist

$$i_n = \frac{1}{5}\left(f_{4n+2} - 5f_{2n+2} + 9 - 2n\right), \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Wir beweisen die Formel (4) mit Induktion. Für $n = 1$ ist

$$\frac{1}{5}\left(f_6 - 5f_4 + 9 - 2\right) = \frac{1}{5}\left(8 - 5 \cdot 3 + 9 - 2\right) = 0,$$

was korrekt ist. Gilt nun für $n - 1$, wie behauptet,

$$i_{n-1} = \frac{1}{5}\left(f_{4n-2} - 5f_{2n} + 9 - 2(n-1)\right) = \frac{1}{5}\left(f_{4n-2} - 5f_{2n} + 11 - 2n\right),$$

so folgt auf Grund der Rekursionsformel (3):

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{1}{5}\left(f_{4n-2} - 5f_{2n} + 11 - 2n\right) + (f_{2n-2} - 1) + (f_{2n} - 1)^2 \\ &= \frac{1}{5}\left(f_{4n-2} - 5f_{2n} + 11 - 2n + 5(f_{2n-2} - 1) + 5(f_{2n} - 1)^2\right) \\ &= \frac{1}{5}\Big(\underbrace{5f_{2n}^2 + f_{4n-2} + 2}_{f_{4n+2}} - 5\underbrace{(3f_{2n} - f_{2n-2})}_{f_{2n+2}} + 9 - 2n\Big). \end{aligned}$$

Werden noch die bei den Unterklammerungen benützten Beziehungen

$$f_{2n+2} = 3f_{2n} - f_{2n-2}, \tag{5}$$

$$5f_{2n}^2 = f_{4n+2} - f_{4n-2} - 2 \tag{6}$$

bewiesen, ist der Induktionsbeweis geführt.

Für den Beweis von (5) beachten wir, dass für alle $k \geq 2$ die Formel $3f_k = f_{k-2} + f_{k+2}$ gilt. (Wie üblich setzt man $f_0 = 0$.) Die Formel gilt nämlich für $k = 2, 3$ und somit wegen der Rekursionsformel $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $k \geq 2$. Für den Beweis von (6) benützt man zweckmässigerweise die Binet-Formel:

$$\sqrt{5}f_m = \alpha^m - \beta^m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{mit } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aus ihr folgt

$$\begin{aligned}
5f_m^2 &= \alpha^{2m} + \beta^{2m} - 2(\alpha\beta)^m \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \alpha^{-2})}_{\sqrt{5}}\alpha^{2m} - \underbrace{(\beta^2 - \beta^{-2})}_{-\sqrt{5}}\beta^{2m}\Big) - 2(-1)^m \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2m+2} - \beta^{2m+2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2m-2} - \beta^{2m-2}\right) - 2(-1)^m \\
&= f_{2m+2} - f_{2m-2} - 2(-1)^m.
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt $m = 2n$, so ist der Nachweis von (6) erbracht.

Aufgabe 1250 (Die einfache dritte Aufgabe). Gegeben seien drei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) und (c_n), welche alle einer Rekursion vom Typ $r_n = 3r_{n-1} - 3r_{n-2} + r_{n-3} \quad (n \geq 4)$ genügen. Ihre Anfangswerte sind $a_1 = 7$, $a_2 = 39$, $a_3 = 95$, $b_1 = 24$, $b_2 = 80$, $b_3 = 168$, $c_1 = 25$, $c_2 = 89$ und $c_3 = 193$. Zeige, dass alle Tripel (a_n, b_n, c_n) pythagoreisch sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 15 Personen haben Lösungen eingesandt: Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Miklós Lévai (Tata, HU), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Meilen, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Einsender argumentieren wie *Michael Vowe* und *Frieder Grupp*: Das charakteristische Polynom der vorliegenden Rekursion $r_n = 3r_{n-1} - 3r_{n-2} + r_{n-3}$ ist $(\lambda - 1)^3$. Nach den bekannten Methoden wird danach

$$r_n = \alpha + \beta(n-1) + \gamma(n-1)^2,$$

wobei die α, β, γ geeignete Konstanten sind.

Für $a_1 = 7$, $a_2 = 39$, $a_3 = 95$ ergeben sich $\alpha = 7$, $\beta = 20$, $\gamma = 12$:

$$a_n = 7 + 20(n-1) + 12(n-1)^2 = 12n^2 - 4n - 1.$$

Für $b_1 = 24$, $b_2 = 80$, $b_3 = 168$ ergeben sich $\alpha = 24$, $\beta = 40$, $\gamma = 16$:

$$b_n = 24 + 40(n-1) + 16(n-1)^2 = 16n^2 + 8n.$$

Für $c_1 = 25$, $c_2 = 89$, $c_3 = 193$ ergeben sich $\alpha = 25$, $\beta = 44$, $\gamma = 20$:

$$c_n = 25 + 44(n-1) + 20(n-1)^2 = 20n^2 + 4n + 1.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$a_n^2 + b_n^2 = (12n^2 - 4n - 1)^2 + (16n^2 + 8n)^2 = (20n^2 + 4n + 1)^2 = c_n^2$$

gilt; somit sind alle Tripel (a_n, b_n, c_n) pythagoreisch.

Peter Bundschuh zeigt zusätzlich, dass alle Tripel (a_n, b_n, c_n) primitiv sind, dass also $\mathrm{ggT}(a_n, b_n, c_n) = 1$ für alle n gilt: Ist nämlich p eine $b_n = 8n(2n+1)$ teilende Primzahl, so gilt entweder $p|2n$ oder $p|(2n+1)$. Im ersten Fall kann p evidenterweise nicht in der Zahl $a_n = 3(2n)^2 - 2 \cdot 2n - 1$ aufgehen; dasselbe erkennt man im zweiten Fall an der Darstellung $a_n = 3(2n+1)^2 - 8(2n+1) + 4$.