Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 64 (2009)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 64 (2009) 171 – 178
0013-6018/09/040171-8

© Swiss Mathematical Society, 2009

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2010 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

- *bis Dezember 2009*
  Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH–5415 Rieden
- *ab Januar 2010*
  Dr. Hansruedi Widmer, Gartenstrasse 19, CH–5400 Baden

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1272: Es seien k und n ganze Zahlen mit $0 \leq k \leq n-2$, und F_m bezeichne die m-te Fibonaccizahl, welche durch die Rekursion

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{m+2} = F_m + F_{m+1} \quad (m \geq 1)$$

gegeben ist. Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = F_{i+j-1}^k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

a) Beweise, dass $\det(\mathcal{A}) = 0$.

b) Man finde Verallgemeinerungen auf allgemeine lineare Rekursionen der Ordnung 2 oder auf lineare Rekursionen höherer Ordnung.

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1273: Die Peripherie eines Kreises vom Radius r sei für den Zentriwinkel α $(0 < \alpha < 2\pi)$ mit Masse der Dichte 1 belegt, der Rest der Peripherie mit Masse der Dichte ϱ $(0 < \varrho < 1)$. Nun hängt man den Kreis an einem der beiden Dichtewechselpunkte O der Peripherie an einem Faden unter dem Einfluss der Schwerkraft auf.

a) Wie lauten die Koordinaten des Kreiszentrums Z in Abhängigkeit von ϱ und α, wenn O im Koordinatenursprung liegt, der Faden mit der positiven und die Richtung der Schwerkraft mit der negativen y-Achse zusammenfallen?

b) Welcher Zusammenhang muss zwischen α und ϱ bestehen, damit die Abweichung des Kreiszentrums Z vom (verlängerten) Aufhängefaden maximal wird?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1274 (Die einfache dritte Aufgabe): Es seien φ die Eulersche φ-Funktion und σ die Teilersummenfunktion. Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\varphi(n) + \sigma(n)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

und finde alle Werte von n, für welche das Minimum angenommen wird.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2008

Aufgabe 1260. Unter den natürlichen Zahlen n, deren Dezimalschreibweise aus 174174 Stellen besteht, betrachten wir jene mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine natürliche Zahl $q > 1$, so dass die Dezimaldarstellung von $q \cdot n$ aus jener von n dadurch entsteht, dass man die letzte Ziffer an den Anfang transferiert. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(Beispielsweise besitzt die zwölfstellige Zahl 179487179487 die gewünschte Eigenschaft, denn $4 \cdot \underline{17948717948}7 = 7\underline{17948717948}$.)

Panagiotis Cheilaris, Athen, GR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Lösungen eingetroffen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Helmut Müller (Buchholz, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH).

Peter Bundschuh argumentiert so: Wir bezeichnen die vorgegebene Stellenzahl 174174 mit s und haben die Faktorzerlegung $s = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29$. Nun hat $n \in \mathbb{N}$ genau dann s Dezimalstellen, wenn

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_{s-1} \cdot 10^{s-1}, \tag{1}$$

mit allen $a_\sigma \in \{0, \ldots, 9\}$ und

$$10^{s-1} \leq n < 10^s \tag{2}$$

gilt, was automatisch $a_{s-1} \neq 0$ impliziert. Gibt es nun ein q wie in der Aufgabenstellung, so ist $q \in \{2, 3, \ldots, 9\}$, weil bei $q \geq 10$ die Stellenzahl von $q \cdot n$ schon mindestens $s + 1$ wäre: weiterhin ist

$$q \cdot n = a_1 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_{s-1} \cdot 10^{s-2} + a_0 \cdot 10^{s-1}, \tag{3}$$

woraus auch $a_0 \neq 0$ ersichtlich ist. Multipliziert man nun (3) mit 10 und subtrahiert davon (1), so ergibt sich

$$(10q - 1) \cdot n = a_0 \cdot (10^s - 1), \tag{4}$$

und man muss abzählen, wie viele (2) genügende Lösungen n Gleichung (4) bei festem $q \in \{2, 3, \ldots, 9\}$ hat. Daraus wird sich ergeben, dass es genau 20 Zahlen n der gesuchten Art gibt.

Wir beginnen mit den Fällen $q = 2, 3, 9$, bei denen $10q - 1$ die Primzahlen 19, 29, 89 sind, von denen, wie wir gleich zeigen werden, keine $10^s - 1$ teilt, weshalb sie nach (4) in a_0 stecken müssten, wofür a_0 aber „zu klein" ist. Man berechnet

$$10^s - 1 \equiv -9 \pmod{19}, \quad 10^s - 1 \equiv -2 \pmod{29}, \quad 10^s - 1 \equiv -2 \pmod{89}.$$

In diesen drei vorweg behandelten Fällen für q gibt es also keine n der gesuchten Form.

Aus (2) und (4) folgt

$$a_0 \overset{(4)}{=} \frac{(10q-1)n}{10^s - 1} \overset{(2)}{>} \frac{(10q-1)10^{s-1}}{10^s} = q - \frac{1}{10}, \tag{5}$$

was mit $a_0 \in \{q, \ldots, 9\}$ äquivalent ist und in jedem der fünf Fälle $q = 4, 5, 6, 7, 8$ zu $10 - q$ Lösungen führt. Insgesamt gibt es also $6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 20$ Lösungen.

Der Nachweis, dass $10^s - 1 \equiv 0 \pmod{39}$, $10^s - 1 \equiv 0 \pmod{49}$, $10^s - 1 \equiv 0 \pmod{59}$, $10^s - 1 \equiv 0 \pmod{69}$ und $10^s - 1 \equiv 0 \pmod{79}$, erfolgt mit gängigen Methoden der Zahlentheorie, z.B. mit Hilfe des Fermat-Eulerschen Satzes.

Mehrere Löser geben einen Algorithmus zur Erzeugung der gesuchten Zahlen an. Die folgende Lösung ist eine von der Redaktion bearbeitete Variante. Wir gehen beim Multiplizieren der Zahl (1) mit q so vor, wie wir es in der Schule gelernt haben: Zuerst multiplizieren wir die hinterste Stelle a_0 mit q. Das Ergebnis $q \cdot a_0$ ist ein- oder zweistellig; wir schreiben die Einerstelle und merken uns den Übertrag r_1. Gemäss Aufgabenstellung muss aber die Einerstelle gerade a_1 sein. Wir formalisieren das, indem wir sagen, wir hätten dem Paar $(r_0, a_0) = (0, a_0)$ das Paar (r_1, a_1) zugeordnet. Nun multiplizieren wir schulgemäss a_1 mit q und addieren den Übertrag r_1, was eine Zahl mit der Einerstelle a_2 und einem neuen Übertrag r_2 liefert. Wir haben also ein neues Paar (r_2, a_2) erzeugt. Fahren wir so weiter, erzeugen wir also ausgehend von q und a_0 eine Folge von Zahlenpaaren

$$(0, a_0), (r_1, a_1), (r_2, a_2), (r_3, a_3), \ldots, \tag{6}$$

welche durch

$$f : \begin{cases} r_{i+1} = \lfloor (q \cdot a_i + r_i)/10 \rfloor \\ a_{i+1} = 10 \cdot \{(q \cdot a_i + r_i)/10\} \end{cases} \qquad (i \geq 0) \tag{7}$$

in der Menge $M = \{(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, 9), (1, 0), \ldots, (q - 1, 8), (q - 1, 9)\}$, die $10q$ Elemente besitzt, definiert ist. Diese Abbildung besitzt die Inverse

$$f^{-1} : \begin{cases} r_{i-1} = 10r_i + a_i \pmod{q} \\ a_{i-1} = \lfloor (10r_i + a_i)/q \rfloor \end{cases} \qquad (i \geq 1). \tag{8}$$

Das Zahlenpaar $(0, a_0)$ ist in der Folge (6) das erste, welches zum zweiten Mal auftritt. Hätte nämlich ein anderes Zahlenpaar (r, a) diese Eigenschaft, müsste es zwei verschiedene Vorgänger haben, was aber der Existenz der Inversen widerspricht. Wir stoppen also in der Folge (6) nach $\ell - 1$ Schritten unmittelbar vor dem erneuten Auftreten von $(0, a_0)$. Aus (7) und (8) können wir entnehmen, dass das letzte Zahlenpaar $(r_{\ell-1}, a_{\ell-1})$=$(a_0 \pmod q, \lfloor a_0/q \rfloor)$ ist. Die Zahl

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_{\ell-1} \cdot 10^{\ell-1} \tag{9}$$

hat nun – abgesehen von der Stellenzahl – die gewünschte Transferierungseigenschaft. Aus $a_{\ell-1} = \lfloor a_0/q \rfloor$ ist ersichtlich, dass man a_0 der Menge $\{q, \ldots, 9\}$ entnehmen muss, damit die führende Ziffer nicht verschwindet, die Zahl also ℓ-stellig ist. Schreibt man diese Zahl m Mal hintereinander, so hat die entstehende $m\ell$-stellige Zahl die gewünschte Transferierungseigenschaft ebenfalls. Weil wir mit dem beschriebenen Algorithmus die Stellenzahl ℓ nicht steuern können, müssen wir nun für $q = 2, 3, \ldots, 9$ jeweils mit den Startwerten $a_0 \in \{q, \ldots, 9\}$ die 36 möglichen Folgen erzeugen. Jedesmal, wenn die Stellenzahl ℓ ein Teiler von 174174 ist, haben wir eine zulässige Zahl gefunden.

Für $q = 2$ erhält man die 18-stelligen Zahlen

$$\begin{array}{ll} 105263157894736842, & 157894736842105263, \\ 210526315789473684, & 263157894736842105, \\ 315789473684210526, & 368421052631578947, \\ 421052631578947368, & 473684210526315789. \end{array}$$

Weil $18 \nmid 174174$, sind sie im Sinne der Aufgabenstellung unbrauchbar.

Für $q = 3$ erhält man die 28-stelligen Zahlen

$$\begin{array}{ll} 1034482758620689655172413793, & 1379310344827586206896551724, \\ 1724137931034482758620689655, & 2068965517241379310344827586, \\ 2413793103448275862068965517, & 2758620689655172413793103448, \\ 3103448275862068965517241379. & \end{array}$$

Weil $28 \nmid 174174$, sind sie im Sinne der Aufgabenstellung ebenfalls unbrauchbar.

Für $q = 4$ erhält man die Zahlen

$$\begin{array}{lll} 102564, & 128205, & 153846, \\ 179487, & 205128, & 230769. \end{array}$$

Die gemeinsame Stellenzahl 6 ist Teiler von 174174. Wenn man jede dieser Zahlen 29029 Mal hintereinander schreibt, erhält man 6 Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung.

Für $q = 5$ erhält man die Zahlen

$$\begin{array}{r} 1020408163265306122448979591836734693877 55, \\ 1224489795918367346938775510204081632653 06, \\ 142857, \\ 1632653061224489795918367346938775510204 08, \\ 1836734693877551020408163265306122448979 59. \end{array}$$

Beide auftretenden Stellenzahlen 6 und 42 sind Teiler von 174174, und man erhält also durch entsprechendes Hintereinanderschreiben 5 weitere Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung.

Für $q = 6$ erhält man die Zahlen

$$\begin{aligned}&101694915254237288135593220338983050847457627118644067796 6,\\&118644067796610169491525423728813559322033898305084745762 7,\\&135593220338983050847457627118644067796610169491525423728 8,\\&152542372881355932203389830508474576271186440677966101694 9.\end{aligned}$$

Die gemeinsame Stellenzahl 58 ist Teiler von 174174. Wenn man jede dieser Zahlen 3003 Mal hintereinander schreibt, erhält man 4 weitere Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung.

Für $q = 7$ erhält man 3 Zahlen mit Stellenzahl 22:

$$\begin{aligned}&1014492753623188405797, \quad 1304347826086956521739,\\&1159420289855072463768.\end{aligned}$$

Indem man sie 7917 Mal hintereinanderschreibt, hat man 3 neue Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung.

Für $q = 8$ erhält man 2 Zahlen mit Stellenzahl 13:

$$1012658227848, \quad 1139240506329.$$

Indem man sie 13398 Mal hintereinanderschreibt, hat man 2 neue Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung.

Im Fall $q = 9$ schliesslich erhält man die 44-stellige Zahl

$$10112359550561797752808988764044943820224719,$$

welche aber keine weitere Lösung liefert, da $44 \nmid 174174$.

Somit hat man also $6+5+4+3+2 = 20$ Zahlen, deren Aufbau nun vollständig bekannt ist.

Die obige Liste von 36 Zahlen (unterschiedlicher Länge) ist ein vollständiger Bausatz für sämtliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass das Transferieren der letzten Stelle an den Anfang der Zahl ein (echtes) Vielfaches der Zahl liefert.

Bemerkung: Obige Überlegungen zeigen, dass in der Lösung von Aufgabe 1246 im Heft 3/08 die Zahl 205128 fehlte und dass zudem bei 153846 ein Tippfehler vorlag.

Aufgabe 1261. Zeige, dass es keine zweimal differenzierbare Funktion f gibt, welche auf $[0, \infty)$ definiert ist und die den Ungleichungen

$$f(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0, \tag{1}$$

$$f(x) \cdot f''(x) + 1 \leq 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0 \tag{2}$$

genügt.

Vicenţiu Rădulescu, Craiova, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Zuschriften von 13 Personen eingegangen, nämlich von Alexander Bofinger (Timişoara, RO [drei Lösungen]), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bogdan-Vasile Matioc (Hannover, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Wir folgen *Henri Carnal*: Aus (1) und (2) folgt

$$f''(x) \leq -\frac{1}{f(x)} < 0 \qquad \text{für} \quad x \geq 0. \tag{3}$$

Die Funktion f ist also für $x \geq 0$ konkav. Für jede nichtnegative Zahl x_0 gilt also

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{für} \quad x \geq 0. \tag{4}$$

Existierte eine Zahl $x_0 \geq 0$ mit $f'(x_0) < 0$, so würde aus (4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ folgen, was im Widerspruch zu (1) steht. Also gilt

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{für} \quad x \geq 0. \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt

$$f'(x) \cdot f''(x) \leq -\frac{f'(x)}{f(x)} \iff \frac{1}{2} f'(x)^2 \leq c_1 - \ln(f(x)), \tag{6}$$

für eine Konstante c_1, was für $x \geq 0$

$$\ln(f(x)) \leq c_1 \iff f(x) \leq e^{c_1} \tag{7}$$

impliziert. Aus (3) und (7) folgt für $x \geq 0$

$$f''(x) \leq -e^{-c_1}, \tag{8}$$

woraus sich für $x \geq 0$

$$f(x) \leq c_2 + c_3 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot e^{-c_1} \cdot x^2 \tag{9}$$

folgern lässt. Daraus aber ergibt sich $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, was im Widerspruch zu (1) steht. Somit gibt es keine Funktion f mit den Eigenschaften (1) und (2).

Bemerkung: Michael Vowe und Walther Janous weisen darauf hin, dass der Autor diese Aufgabe auch in The College Mathematics Journal und in Crux Mathematicorum publiziert hat.

Aufgabe 1262 (Die einfache dritte Aufgabe). Zwei Gegenkanten eines Tetraeders sind orthogonal, wenn eine bestimmte Beziehung zwischen den Längen der anderen vier Kanten besteht.

a) Finde diese Beziehung.

b) Welche Höchstsymmetrie (grösste Ordnung der Symmetriegruppe) kann ein Tetraeder haben, falls es genau zwei orthogonale Gegenkanten besitzt?

Karl Wirth, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 10 Personen haben Lösungen eingesandt: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH).

Wir folgen *Hans Heiner Storrer*:

a) Wir bezeichnen die Ecken des Tetraeders mit O, A, B, C und setzen $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{x} = \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{y} = \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Mit $a, b, \ldots$ bezeichnen wir sowohl die zugehörigen Kanten als auch deren Längen. Dann gilt: Die Kante a und die gegenüberliegende Kante x sind genau dann orthogonal, wenn für die beiden anderen Paare gegenüberliegender Kanten (b, y) und (c, z) gilt: $b^2 + y^2 = c^2 + z^2$.

Beweis:

$$a \perp x \iff \vec{a}\vec{x} = 0 \iff \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0 \iff \vec{b}^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2 = \vec{c}^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$$
$$\iff b^2 + y^2 = c^2 + z^2.$$

b) Wir nummerieren die Ecken des Tetraeders von 1 bis 4 und nehmen an, die Kante a verbinde die Ecken 1 und 2 und die Kante x verbinde die Ecken 3 und 4. Ferner sei das Kantenpaar (a, x) als einziges orthogonal. Wir beschreiben die Symmetrien durch Permutationen der Ecken. Weil jede Symmetrie des Tetraeders orthogonale Kantenpaare in orthogonale Kantenpaare überführen muss, werden a und x entweder auf sich selbst abgebildet oder aber vertauscht. Dabei können noch die Eckpunkte der einzelnen Kanten vertauscht werden. Es gibt also maximal 8 mögliche Symmetrien, beschrieben durch

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun zeigen wir, dass es ein Tetraeder gibt, welches diese 8 Symmetrien zulässt, nämlich ein Tetraeder, dessen vier Seitenflächen kongruent zu einem gleichschenkligen, aber nicht gleichseitigen Dreieck sind. Die Ecken 1, 2, 3, 4 seien in einem kartesischen Koordinatensystem durch $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$ gegeben. Dann verifiziert man leicht, dass die obigen Symmetrien wie folgt beschrieben werden können:

ι : Identität.

α : Spiegelung an der (x, y)-Ebene.

β : Spiegelung an der (x, z)-Ebene.

γ : Rotation um die z-Achse um $180°$.

δ : Rotation um $+90°$ um die z-Achse, gefolgt von einer Spiegelung an der (x, y)-Ebene.

ϵ : Rotation um $-90°$ um die z-Achse, gefolgt von einer Spiegelung an der (x, y)-Ebene.

ξ : Rotation um 180° um die durch $y = x$ gegebene Gerade der (x, y)-Ebene.

η : Rotation um 180° um die durch $y = -x$ gegebene Gerade der (x, y)-Ebene.

Bemerkungen:

- Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass jede Untergruppe der Ordnung 8 der symmetrischen Gruppe S_4 isomorph zur Diedergruppe D_4 des Quadrats ist. Dies gilt insbesondere für die gesuchte Symmetriegruppe. Dies lässt sich auch direkt einsehen, indem man das oben beschriebene Tetraeder längs der z-Achse auf die (x, y)-Ebene projiziert. Die projizierten Ecken $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ bilden ein Quadrat und die Wirkung der aufgeführten Abbildungen auf dieses Quadrat sind genau die 8 Elemente von D_4: Drehungen um 0°, 90°, 180°, 270° und die Achsenspiegelungen an den beiden Diagonalen und den beiden Mittelsenkrechten.
- Mehrere Löser beschreiben die Tetraeder maximaler Symmetrie wie folgt:
  1. Die beiden senkrecht stehenden Kanten sind gleich lang.
  2. Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden senkrechten Kanten verbindet, steht auf diesen beiden Kanten senkrecht.

Korrigendum: In allen drei Löserlisten in Heft 3/09 ist Michael Vowe fälschlicherweise unerwähnt geblieben.