Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 65 (2010)

Artikel: Ein konkretes Modell der reellen Zahlen
Autor: Blatter, Christian
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-130689

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 65 (2010) 49 – 61
0013-6018/10/020049-13
DOI 10.4171/EM/140

© Swiss Mathematical Society, 2010

Elemente der Mathematik

Ein konkretes Modell der reellen Zahlen

Christian Blatter

Christian Blatter hat an der Universität Basel studiert. Von 1964 bis 2000 war er zunächst Assistenzprofessor, später ordentlicher Professor für Mathematik an der ETH Zürich.

1 Einführung

Q: Was ist eine reelle Zahl? A: Alle Zahlen, die Du kennst, wie 7, -51, 10^6, $\frac{5}{9}$, 2.4137, $\sqrt{3}$, π, sind reelle Zahlen. Q: Das sind nur Beispiele. Was ist die allgemeinste reelle Zahl? A: Ein Punkt auf der Zahlengeraden.

Je nach *level of sophistication* wird unser Fragesteller auch mit Antworten der folgenden Art bedient: Eine reelle Zahl ist

- ein unendlicher Dezimalbruch,
- das Resultat einer Intervallschachtelung,
- ein Schnitt von $\mathbb{Q}$, d.h. eine *black box*, die nach Eingabe einer rationalen Zahl mit „grösser“ oder mit „höchstens“ antwortet,
- eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen,
- ein Pseudo-Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ (s.u.).

Während man sich am Gymnasium der Idee der reellen Zahl (zum Beispiel bei der Kreisberechnung) mit Hilfe von Intervallschachtelungen nähert, ist es in den Grundvorlesungen der Hochschulen üblich, das System $\mathbb{R}$ mit einem Schlag als ordnungsvollständigen

Das System der reellen Zahlen ist das essenzielle Fundament aller Analysis. Erstaunlicher Weise ist erst im letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts eine theoretische Begründung – axiomatische Beschreibung plus Konstruktion – dieses Systems als notwendig erachtet und durch Dedekind auch geliefert worden. Unterdessen gibt es zahlreiche ganz unterschiedliche Konstruktionen der reellen Zahlen. Mit keinem dieser Ansätze ist das Gesamtsystem billig zu haben: Es braucht jedes Mal einen ziemlichen Aufwand, bis alle Details überprüft sind. Die hier vorgeschlagene Konstruktion verwendet unendliche Dualbrüche als Ausgangsmaterial. Auf diese Weise erscheinen die reellen Zahlen von Anfang an elementweise in der Form einer „überabzählbaren Liste“.

Körper axiomatisch einzuführen, wobei auf den Beweis, dass es ein derartiges System tatsächlich gibt, aus Zeitgründen im allgemeinen verzichtet wird.

Der erste publizierte Beweis stammt bekanntlich von Dedekind 1872 [2]. Die heute verbreiteten Lehrbücher konstruieren $\mathbb{R}$ (wenn überhaupt) ausgehend von $\mathbb{Q}$ mit Hilfe von Dedekindschen Schnitten (siehe etwa [9], [11]), oder auch mit Hilfe von Cauchy-Folgen (siehe etwa [6], [8]). Eine moderne Konstruktion, A'Campo [1] zugeschrieben, arbeitet mit *Fast-Homomorphismen* der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$; das sind Funktionen $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, für die die Menge

$$\{\phi(m+n) - \phi(m) - \phi(n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

endlich ist. Zwei solche Funktionen ϕ und ψ werden als *äquivalent* angesehen, wenn die Differenz $\phi(n) - \psi(n)$ beschränkt bleibt. Die beiden Funktionen sind dann Repräsentanten desselben *Pseudo-Homomorphismus* von $\mathbb{Z}$. Aus der Ferne betrachtet sieht der Graph eines Fast-Homomorphismus wie eine Pixelgerade aus. Die zu äquivalenten ϕ, ψ gehörigen Pixelgeraden haben dieselbe „Steigung", und diese Steigung ist die von der betreffenden Äquivalenzklasse repräsentierte reelle Zahl. A'Campos Konstruktion ist auch in [3] wiedergegeben; ein Vorläufer ist der Ansatz von Schönhage [12].

Allen Konstruktionen, auch der vorliegenden, ist gemeinsam, dass die Einrichtung der Rechenoperationen auf der einmal hergestellten Menge $\mathbb{R}$, und daran anschliessend die Verifikation aller Körperaxiome sowie der beiden Ordnungsaxiome (O+) und (O·) (s.u.), zusammengenommen einen ansehnlichen Aufwand erfordern.

Der Normalsterbliche nimmt reelle Zahlen in erster Linie als Dezimalbrüche wahr und ist seit Kindsbeinen im Umgang mit derartigen Brüchen vertraut; auch unendliche Dezimalbrüche wie $0.16666\ldots$ oder die unendlich vielen mehr oder weniger zufälligen Stellen von π kann er akzeptieren. In den angeführten Lehrbüchern wird darauf hingewiesen (oder sogar bewiesen, wie in [8] oder [13]), dass jede reelle Zahl eine im Wesentlichen eindeutig bestimmte unendliche Dezimalbruchentwicklung besitzt. Dies erfolgt aber *a posteriori*; die Dezimalbrüche werden nicht direkt zum Aufbau des Systems $\mathbb{R}$ herangezogen.

In seinen „Mathematical discussions" [4], einer Reihe von mathematikdidaktischen Essays, hat Timothy Gowers (Fields-Medaille 1998) vorgeschlagen, die Dezimalbrüche zum Ausgangspunkt der Konstruktion von $\mathbb{R}$ zu nehmen, und auch den weiteren Aufbau skizziert [5]. Die Schwierigkeit bei derartigen Unternehmen besteht darin, operativ mit dem irritierenden Sachverhalt $0.9999\ldots = 1.0000\ldots$ fertigzuwerden. Gowers führt das nicht im Detail aus. In den Darstellungen [7] und [10] werden Dezimalbrüche mit Neunerenden als „singulär" betrachtet und zunächst ausgeschlossen. Das kann aber nicht recht befriedigen, da derartige Dezimalbrüche schon bei einfachen Rechnungen wie $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ oder $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ zwingend auftreten.

Auf den folgenden Seiten bringen wir eine Konstruktion von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von unendlichen Dualbrüchen, wobei wir uns damit abfinden, dass gewisse reelle Zahlen durch *zwei* Dualbrüche repräsentiert werden. Der Wechsel von der Basis 10 zu der Basis 2 (von Gowers in einer Nebenbemerkung antizipiert) ist Ermessenssache und wäre an sich nicht nötig gewesen. Entscheidend bleibt, dass auf diese Weise die reellen Zahlen von Beginn an elementweise in der Form einer „überabzählbaren Liste" erscheinen und nicht als Äquivalenzklassen in einem Meer von abstrakten Entitäten wie Cauchy-Folgen oder Fast-Homomorphismen.

2 Endliche Dualbrüche

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathbb{D}_n := \left\{ \frac{z}{2^n} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \right\} \quad (n \geq 0)\,, \qquad \mathbb{D} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{D}_n\,;$$

die Elemente von $\mathbb{D}$ nennen wir *Binärzahlen*. Mit der Abkürzung

$$\iota_n := 2^{-n} \qquad (n \geq 0)$$

besitzt jedes $a \in \mathbb{D}$ eine (bis auf überflüssige Nullen) wohlbestimmte *endliche* Dualbruch-Entwicklung der Form

$$a = \sum_{k=0}^{n} x_k\, \iota_k =: x_0\,.\,x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \tag{1}$$

mit Ziffern

$$x_0 = \lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}\,, \qquad x_k \in \{0, 1\} \quad (1 \leq k \leq n)\,;$$

dabei hängt n von a ab. Beachte, dass in diesem Zahlenformat die sämtlichen Vorkommastellen sowie das Vorzeichen von a in der Anfangsziffer x_0 abgelegt werden.

Beispiel. $a = -9\,.\,1101$ bezeichnet den Sachverhalt $a = -9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{131}{16}$.

Wir wollen hier das „schriftliche" Rechnen mit Binärzahlen bzw. endlichen Dualbrüchen nicht weiter hinterfragen. Algebraisch gesehen ist $\mathbb{D}$ ein Ring, aber kein Körper, da die Division von Dualbrüchen im allgemeinen nicht aufgeht. Nur durch Potenzen von 2 kann man unbeschränkt dividieren. Besonders erfreulich ist, dass die natürliche Ordnung der Binärzahlen mit der lexikographischen Ordnung der zugehörigen Dualbrüche übereinstimmt. Genau: Für zwei Binärzahlen $a = \sum_{k=0}^{n} x_k\, \iota_k$ und $b = \sum_{k=0}^{n} y_k\, \iota_k$ gilt $a < b$ genau dann, wenn es ein $r \geq 0$ gibt mit

$$x_k = y_k \quad (k < r)\,, \qquad x_r < y_r\,.$$

3 Unendliche Dualbrüche

Ein *unendlicher Dualbruch* ist eine unendliche Folge

$$\mathbf{x} = (x_k)_{k \geq 0} =: x_0\,.\,x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \ldots$$

mit $x_0 \in \mathbb{Z}$ und $x_k \in \{0, 1\}$ $(k \geq 1)$. Die Gesamtheit dieser Folgen bezeichnen wir mit X. Die Menge X ist von vorneherein lexikographisch geordnet und enthält die speziellen Elemente

$$0\,.\,0000\ldots =: \mathbf{0}\,, \qquad 1\,.\,0000\ldots =: \mathbf{1}\,.$$

Die zu Grunde liegende Vorstellung ist natürlich die, dass ein $\mathbf{x} \in X$ die „unendlichstellige Zahl"

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\, \iota_k = x_0\,.\,x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$$

repräsentiert. Immerhin lässt sich jede Binärzahl a resp. jeder endliche Dualbruch (1) durch Anhängen von unendlich vielen Nullen als Element von X auffassen. Damit erscheint $\mathbb{D}$ als Teilmenge von X, und zwar unter Erhaltung der Ordnung. In diesem Zusammenhang treffen wir die folgende Vereinbarung: Wenn eine Folge $\mathbf{x} \in X$ mit lauter Nullen endet, das heißt: wenn es ein n gibt mit $x_k = 0$ $(k > n)$, so bezeichnet $\mathbf{x}$ auch die Binärzahl $\sum_{k=0}^{n} x_k \iota_k$, und für zwei derartige Folgen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ bezeichnet $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ die Summe der betreffenden Zahlen, ausgedrückt als ein Element von X; analog für das Produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Die Elemente $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ haben die besondere Eigenschaft, dass sie in X einen unmittelbaren lexikographischen Vorgänger $\mathbf{x}'$ besitzen: Bezeichnet $\mathbf{x}$ die ganze Zahl z, so ist

$$\mathbf{x} = z\,.\,0000\ldots\,, \qquad \mathbf{x}' = (z-1)\,.\,1111\ldots$$

Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$, so weist $\mathbf{x}$ eine letzte 1 nach dem Komma auf, und man hat

$$\mathbf{x} = x_0\,.\,x_1 \ldots x_{n-1}\,1\,0000\ldots\,, \qquad \mathbf{x}' = x_0\,.\,x_1 \ldots x_{n-1}\,0\,1111\ldots$$

Beispiel. $\mathbf{x} = 5\,.\,0110000\ldots\,,\ \mathbf{x}' = 5\,.\,0101111\ldots$

In diesen Fällen lässt sich kein $\mathbf{y} \in X$ angeben, das echt zwischen $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}$ liegt. Dies widerspricht unserer vielfach erhärteten Gewissheit, dass zwischen je zwei verschiedenen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist einfach: Wir betrachten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ als zwei verschiedene Darstellungen ein und derselben reellen Zahl. Abstrakt: Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist die Quotientenmenge von X bezüglich der so definierten Äquivalenz $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$. Da die Sache so übersichtlich ist, führen wir keine eigene Bezeichnung für die Äquivalenzklassen ein, sondern arbeiten weiterhin mit den Folgen $\mathbf{x} \in X$ selbst und werden die notwendigen Überprüfungen an Ort und Stelle vornehmen.

Das Hauptwerkzeug unserer Konstruktion sind die *Abrunde-Operatoren*

$$T_n : X \to \mathbb{D}_n \quad (\subset X)\,, \qquad \mathbf{x} \to T_n\mathbf{x} \qquad (n \geq 0)\,,$$

die wie folgt definiert sind:

$$\big(T_n\mathbf{x}\big)_k := \begin{cases} x_k & (0 \leq k \leq n)\,, \\ 0 & (k > n)\,. \end{cases}$$

Man hat die folgenden Rechenregeln:

(a) $$T_n\mathbf{x} \leq \mathbf{x}\,; \qquad n \leq n' \;\Rightarrow\; T_n\mathbf{x} \leq T_{n'}\mathbf{x} < T_n\mathbf{x} + \iota_n\,;$$

(b) $$T_n\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \forall n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{y}\,;$$

(c) $$|T_n\mathbf{x}| \leq |x_0| + 1 \qquad (n \geq 0)\,;$$

(d) $$T_n \circ T_m = T_{\min\{n,m\}}\,.$$

Wir zeigen als erstes, dass sich zwei *verschiedene* reelle Zahlen nicht beliebig nahe kommen können, sondern immer durch ein „binäres Intervall“ positiver Länge voneinander getrennt sind:

Satz 1. *Sind* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *zwei Elemente von* X *mit* $\mathbf{x} \lneq \mathbf{y}$, *so gibt es ein* $r \in \mathbb{N}$ *und Binärzahlen* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{D}_r$ *mit*

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{u} < \mathbf{v} \leq \mathbf{y} \,. \tag{2}$$

Beweis. Wegen $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ ist $y_0 - x_0 \geq 1$, oder es gibt ein $m \geq 1$ mit

$$T_{m-1}\mathbf{x} = T_{m-1}\mathbf{y} =: \mathbf{a} \,, \qquad x_m = 0 \,, \quad y_m = 1 \,.$$

Es wird genügen, den Fall $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $x_m = 0$, $y_m = 1$ ($m = 0$ zugelassen) weiter zu verfolgen. Wegen $\mathbf{x} \nsim \mathbf{y}$ trifft mindestens eines der beiden folgenden zu:

(I) In der Folge $\mathbf{y}$ erscheint nach y_m eine erste weitere 1, das heisst, es gibt ein $r > m$ mit

$$\mathbf{x} = \ldots 000\underset{m}{0}\, x_{m+1} \ldots \,, \qquad \mathbf{y} = \ldots 000\underset{m}{1}00\ldots 00\underset{r}{1}\, y_{r+1} \ldots$$

In diesem Fall trennen die Zahlen $\mathbf{u} := \iota_m$ und $\mathbf{v} := \iota_m + \iota_r$ die beiden Folgen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wie angegeben.

(II) In der Folge $\mathbf{x}$ erscheint nach x_m eine erste weitere 0, das heisst, es gibt ein $r > m$ mit

$$\mathbf{x} = \ldots 000\underset{m}{0}11\ldots 11\underset{r}{0}\, x_{r+1} \ldots \,, \qquad \mathbf{y} = \ldots 000\underset{m}{1}\, y_{m+1} \ldots$$

In diesem Fall trennen die Zahlen $\mathbf{u} := T_r\mathbf{x} + \iota_r = \iota_m - \iota_r$ und $\mathbf{v} := \iota_m$ die beiden Folgen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wie angegeben. □

4 Folgen von unendlichen Dualbrüchen

Eine unendlichstellige reelle Zahl als Resultat einer Rechnung (Addition, Multiplikation, ...) können wir nur über einen „Grenzprozess" erhalten. Wir betrachten also Folgen

$$j \mapsto \mathbf{x}_j \quad (j \geq 0), \qquad (\mathbf{x}_j)_k =: x_{j.k} \,,$$

von unendlichen Dualbrüchen. Eine derartige Folge ist *monoton wachsend*, wenn für alle $j \geq 0$ gilt: $\mathbf{x}_{j+1} \geq \mathbf{x}_j$, und *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt mit $\left|x_{j.0}\right| \leq M$ für alle $j \geq 0$.

Das universelle Instrument zur Erzeugung von bestimmten reellen Zahlen ist der folgende Satz:

Satz 2.

(e) *Es sei* $\left(\mathbf{x}_j\right)_{j\geq 0}$ *eine monoton wachsende und beschränkte Folge in* X. *Dann gibt es ein wohlbestimmtes Element* $\mathbf{s} \in X$ *und für alle* $n \geq 0$ *ein* j_n *mit*

$$T_n\mathbf{s} \;=\; T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq j_n) \,.$$

(f) *Dabei gilt* $\mathbf{x}_j \leq \mathbf{s}$ *für alle* $j \geq 0$.

In Worten: Die auf n Stellen nach dem Komma abgerundeten „Zahlen" $\mathbf{x}_j$ sind für alle $j \geq j_n$ gleich der auf n Stellen angegebenen „Limeszahl" $\mathbf{s}$.

Beweis. (e) Es kann höchstens ein derartiges $\mathbf{s}$ geben. Für den Existenzbeweis halten wir $n \geq 0$ zunächst fest. Die Folge

$$j \mapsto T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq 0)$$

ist nach Regel (a) monoton wachsend. Da ihr nur $(2M+1) \cdot 2^n$ mögliche Werte zur Verfügung stehen, muss dieses Wachstum nach endlich vielen Schritten zum Stillstand kommen. Es gibt also ein j_n und ein $\mathbf{s}_n \in \mathbb{D}_n$ mit

$$T_n(\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_n \qquad (j \geq j_n)\,.$$

Dieses $\mathbf{s}_n$ inkorporiert die ersten n Stellen der gesuchten „Limeszahl" $\mathbf{s}$: Ist $n' \geq n$, so gilt für $j := \max\{j_n, j_{n'}\}$ die Beziehung

$$T_n(\mathbf{s}_{n'}) = T_n \circ T_{n'}(\mathbf{x}_j) = T_n(\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_n\,;$$

in Worten: Die einmal berechneten Stellen der Limesfolge $\mathbf{s}$ ändern sich bei höherem Genauigkeitsanspruch nicht mehr und können als definitive Ziffern von $\mathbf{s}$ verwendet werden. Der unendliche Dualbruch $\mathbf{s} = (s_k)_{k \geq 0}$ wird also erklärt durch

$$s_k := s_{n.k} \qquad (n \geq k \geq 0)\,.$$

Dann gilt

$$T_n\mathbf{s} = \mathbf{s}_n = T_n(\mathbf{x}_j) \qquad (j \geq j_n)\,,$$

wie behauptet.

(f) Gäbe es ein j mit $\mathbf{x}_j > \mathbf{s}$, so hätte man $T_n(\mathbf{x}_j) > T_n\mathbf{s}$ für ein gewisses n und folglich

$$T_n(\mathbf{x}_{j'}) \geq T_n(\mathbf{x}_j) > T_n\mathbf{s} = \mathbf{s}_n \qquad (j' \geq j)\,,$$

im Widerspruch zur Definition von $\mathbf{s}_n$. □

Wir bezeichnen das in Satz 2 beschriebene $\mathbf{s} \in X$ im Weiteren mit $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j$. Beachte: Der so definierte Grenzwert ist „rein digital" erklärt; es werden keine Abstände gemessen. Wir notieren noch die folgende Rechenregel:

(g) *Ist* $(\mathbf{x}_j)_{j\geq 0}$ *eine Folge der in Satz* 2 *beschriebenen Art und gilt* $\mathbf{x}_j \leq \mathbf{y}$ *für alle* j, *so folgt* $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{y}$.

5 Rechnen mit reellen Zahlen

Wir kommen nun zur Definition der Rechenoperationen. Für das Rechnen mit reellen Zahlen müssen wir uns natürlich auf das etablierte Rechnen mit endlichen Dualbrüchen abstützen. Dabei verwenden wir weiterhin $+$ und $\cdot$ für die vorhandene Addition und Multiplikation in $\mathbb{D}$ und verwenden $\oplus$ und $\odot$ für die in $\mathbb{R}$ neu einzurichtenden Operationen.

Zunächst die Addition. Für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ sind die Folgen

$$j \mapsto T_j\mathbf{x}\,, \qquad j \mapsto T_j\mathbf{y}$$

monoton wachsend und beschränkt, und dasselbe ist dann auch für die Folge

$$j \mapsto T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq 0)$$

der Fall. Mit Hilfe von Satz 2 definieren wir nun

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} := \lim_{j\to\infty} (T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y}) \,.$$

In Worten: Man erhält n korrekte Stellen der Summe $\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}$, indem man hinreichend genaue Approximationen $T_j\mathbf{x}$ und $T_j\mathbf{y}$ in $\mathbb{D}$ addiert und das Resultat auf n Stellen abrundet.

Beispiel. Betrachte zwei Folgen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$x_0 = y_0 = 0\,, \quad x_k = y_k = 1 \;\; (k = 2^m,\; m \geq 0)\,, \quad x_k + y_k = 1 \;\; (\text{sonst}).$$

Zur Berechnung von $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$ kann man der Einfachheit halber $\mathbf{x} = 0\,.\,1111\ldots$ und $y_k = 1$ $(k = 2^m)$ bzw. $= 0$ (sonst) annehmen. Man erhält $\mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = 1\,.\,1101000100000\ldots$ mit einer 1 an den Stellen $k = 0$ und $k = 2^m$, $m \geq 0$. Für $n := 2^m$ findet man $j_n = 2n$; das heißt zum Beispiel, dass erst $T_{32}\mathbf{x} + T_{32}\mathbf{y}$ die ersten 16 Stellen von $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$ richtig wiedergibt.

Die so definierte Addition $\oplus : X \times X \to X$ ist offensichtlich kommutativ, und $\mathbf{0}$ wirkt als Neutralelement. Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\text{(h)} \qquad \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{D})\,,$$

das heißt, die Operation $\oplus$ ist eine konsistente Erweiterung der in $\mathbb{D}$ vorhandenen Addition auf X.

Um die Assoziativität der Operation $\oplus$ zu beweisen, benötigen wir die für jedes $n \geq 0$ geltenden Ungleichungen

$$\text{(i)} \qquad T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \quad (j \geq j_n)\,; \qquad T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y} \leq T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y})\,.$$

Beweis. Erstens ist

$$T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq j_n)\,,$$

und zweitens hat man für $j := \max\{n, j_n\}$ die Abschätzung

$$T_n(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{y}) \geq T_n(T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y}) = T_n\mathbf{x} + T_n\mathbf{y}\,. \qquad \square$$

Damit schließen wir nun wie folgt: Zu jedem $n \geq 0$ gibt es ein j und ein j' mit

$$\begin{aligned} T_n\big((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z}\big) &\leq T_j(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) + T_j\mathbf{z} \leq T_{j'}\mathbf{x} + T_{j'}\mathbf{y} + T_{j'}\mathbf{z} \\ &\leq T_{j'}\mathbf{x} + T_{j'}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \leq T_{j'}\big(\mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\big) \\ &\leq \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} \leq \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$ nach Regel (b), und aus Symmetriegründen gilt dann auch die umgekehrte Ungleichung.

Das für die Addition in geordneten Körpern maßgebende Axiom

(O+) $$x < y \quad \Rightarrow \quad x + z \; < \; y + z$$

haben wir zunächst nur in der folgenden schwächeren Form:

(j) $$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{z} \; \leq \; \mathbf{y} + \mathbf{z} \, .$$

Beweis. Für alle j gilt nach Satz 2(f) die Ungleichung

$$T_j\mathbf{x} + T_j\mathbf{z} \leq T_j\mathbf{y} + T_j\mathbf{z} \leq \mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \, ,$$

und mit (g) folgt die Behauptung. □

Um weiter zu kommen, benötigen wir die folgende schlanke Version von Satz 1 sowie deren Gegenstück:

(k) *Gilt* $\mathbf{x} \lneqq \mathbf{y}$, *so gibt es ein* $r \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{y}$.

(l) *Für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ *und alle* $n \geq 0$ *gilt* $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n$.

Beweis. Nach Satz 1 gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie Zahlen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{D}_r$, so dass (2) gilt. Hieraus folgt mit (j) und (h):

$$\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{u} \oplus \iota_r \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{y} \, .$$

Zum Beweis von (l) betrachten wir ein festes $n \geq 0$. Für alle hinreichend großen j gilt

$$T_j\mathbf{x} = T_j\mathbf{x}' + \iota_j \leq T_j\mathbf{x}' + \iota_n = T_j\mathbf{x}' \oplus \iota_n \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n \, ,$$

und hieraus folgt die Behauptung mit (a). □

Damit können wir nun (O+) beweisen:

Beweis. Es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{x} \oplus \iota_r \leq \mathbf{y}$, und hieraus folgt mit (j):

$$(\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \oplus \iota_r \leq \mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \, . \tag{3}$$

Die Äquivalenz $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \sim (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$ würde nach (l) die Ungleichungen

$$\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \leq (\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}) \oplus \iota_n \qquad (n \geq 0)$$

nach sich ziehen, was für $n > r$ zu einem Widerspruch mit (3) führt. □

Nun zu einem heiklen Punkt: Die Binärzahlen haben ja zwei Repräsentanten in X. Damit wir $\oplus$ tatsächlich als Addition auf $\mathbb{R}$ auffassen können, müssen wir die Äquivalenz

$$\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \; \sim \; \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{D}, \; \mathbf{y} \in X)$$

verifizieren.

Beweis. Mit (j) folgt $\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$. Wäre dabei $\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \lneqq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$, so gäbe es nach (k) und (l) ein r, so dass

$$\mathbf{x}' \oplus \mathbf{y} \oplus \iota_r \leq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \leq \mathbf{x}' \oplus \iota_n \oplus \mathbf{y}$$

für alle n zutrifft, im Widerspruch zu (j). □

Bezüglich der Multiplikation können wir uns ein wenig kürzer fassen. Wir betrachten zwei beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, wobei wir zunächst $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ voraussetzen. Dann ist die Folge

$$j \mapsto T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq 0)$$

monoton wachsend und beschränkt. Satz 2 garantiert daher die Existenz des Produkts

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := \lim_{j\to\infty} (T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \,.$$

Die so definierte Multiplikation $\odot : X_{>0} \times X_{>0} \to X$ ist offensichtlich kommutativ mit $\mathbf{1}$ als Neutralelement, und es gilt das Ordnungsaxiom

$$(\mathrm{O}\cdot) \qquad \mathbf{x} > \mathbf{0} \;\wedge\; \mathbf{y} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \odot \mathbf{y} > \mathbf{0} \,.$$

Um die Assoziativität der Operation $\odot$ zu beweisen, benötigen wir die für jedes $n \geq 0$ geltenden Ungleichungen

$$(\mathrm{m}) \qquad T_n(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \quad (j \geq j_n)\,; \qquad T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y} \leq T_{2n}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \,.$$

Beweis. Erstens ist

$$T_n(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = T_n(T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \leq T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y} \qquad (j \geq j_n)\,,$$

und zweitens hat man für $j \geq \max\{n, j_{2n}\}$ die Abschätzung

$$T_{2n}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = T_{2n}(T_j\mathbf{x} \cdot T_j\mathbf{y}) \geq T_{2n}(T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y}) = T_n\mathbf{x} \cdot T_n\mathbf{y} \,. \qquad \square$$

Damit schließen wir nun wie folgt: Zu jedem $n \geq 0$ gibt es ein j und ein j' mit

$$\begin{aligned} T_n\big((\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z}\big) &\leq T_j(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \cdot T_j\mathbf{z} \leq T_{j'}\mathbf{x} \cdot T_{j'}\mathbf{y} \cdot T_{j'}\mathbf{z} \\ &\leq T_{2j'}\mathbf{x} \cdot T_{2j'}(\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) \leq T_{4j'}\big(\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z})\big) \\ &\leq \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) \,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z} \leq \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z})$ nach Regel (b), und aus Symmetriegründen gilt dann auch die umgekehrte Ungleichung.

Den ganz ähnlichen Beweis des Distributivgesetzes

$$(\mathrm{n}) \qquad \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \;=\; (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \;\oplus\; (\mathbf{x} \odot \mathbf{z})$$

überlassen wir dem Leser.

Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{D})\,,$$

das heißt, die Operation $\odot$ ist eine konsistente Erweiterung der in $\mathbb{D}$ vorhandenen Multiplikation auf X. Damit wir $\odot$ tatsächlich als Multiplikation auf $\mathbb{R}$ auffassen können, müssen wir die Äquivalenz

$$\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \;\sim\; \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{D},\; \mathbf{y} \in X)$$

verifizieren.

Beweis. Wie (j) beweist man

$$\text{(o)} \qquad \mathbf{0} < \mathbf{x} \le \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \le \mathbf{y} \odot \mathbf{z}\,,$$

und hieraus folgt $\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \le \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$. Um nun $\mathbf{x}' \odot \mathbf{y} \lneqq \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ auszuschließen, nehmen wir nach (k) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$(\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus \iota_r \;\le\; \mathbf{x} \odot \mathbf{y}\,. \tag{4}$$

Es gibt ein N mit $T_j\mathbf{y} < y_0 + 1 \le 2^N$ für alle j, und hieraus folgt $\mathbf{y} \le 2^N$. Wähle nun $n > r + N$. Mit Hilfe von (l) und (o) ergibt sich dann

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \le (\mathbf{x}' \oplus \iota_n) \odot \mathbf{y} = (\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus (\iota_n \odot \mathbf{y}) \le (\mathbf{x}' \odot \mathbf{y}) \oplus (\iota_n \cdot 2^N)\,.$$

Dies steht wegen $2^N \iota_n < \iota_r$ im Widerspruch zu (4). □

6 Inverse

Sowohl das additive wie das multiplikative Inverse sind in $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt: Gilt $\mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_1 \sim \mathbf{0}$ und $\mathbf{y}_2 \oplus \mathbf{x}_2 \sim \mathbf{0}$ und ist $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2$, so folgt nach dem schon Bewiesenen:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{0} \sim \mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_2 \oplus \mathbf{y}_2 \sim \mathbf{y}_1 \oplus \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{y}_2 \sim \mathbf{0} + \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2\,,$$

und analog schließt man für das multiplikative Inverse.

Das additive Inverse eines beliebigen Dualbruchs $\mathbf{x} = x_0 \,.\, x_1 x_2 x_3 \ldots \in X$ lässt sich explizit angeben: Definiert man die Folge $\mathbf{y} = y_0 \,.\, y_1 y_2 y_3 \ldots \in X$ durch

$$y_0 := -x_0 - 1\,, \qquad y_k := 1 - x_k \quad (k \ge 1)\,,$$

so gibt es bei der Addition von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wegen $x_k + y_k = 1$ $(k \ge 1)$ keine Stellenüberträge; folglich erhält man ohne Weiteres

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = -1 \,.\, 1111 \ldots \sim \mathbf{0}\,.$$

Hiernach ist $\mathbf{y}$ das additive Inverse von $\mathbf{x}$ und darf mit $-\mathbf{x}$ bezeichnet werden. Es gelten die Regeln $-(-\mathbf{x}) \sim \mathbf{x}$ und $-(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \sim (-\mathbf{x}) \oplus (-\mathbf{y})$.

Das multiplikative Inverse erhalten wir mit Hilfe des in der Schule gelernten Divisionsalgorithmus, wobei wir allerdings unendlichstellige Divisoren vorsehen müssen. Es sei also ein $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ gegeben, dessen Kehrwert konstruiert werden soll. Die Zahl $\mathbf{a}$ kann nicht beliebig klein sein: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $T_n\mathbf{a} \ge \iota_m$ für alle $n \ge m$. Betrachte jetzt die Mengen

$$Q_n := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_n \;\middle|\; (T_n\mathbf{a} + \iota_n) \cdot \mathbf{x} \le 1\right\} \qquad (n \ge m)\,.$$

Für alle $\mathbf{x} \in Q_n$ gilt $\iota_m \cdot \mathbf{x} \le (T_n\mathbf{a} + \iota_n) \cdot \mathbf{x} \le 1$ und folglich $\mathbf{x} \le 2^m$. Wegen $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{D}_{n+1}$ und

$$T_{n+1}\mathbf{a} + \iota_{n+1} \le T_n\mathbf{a} + \iota_{n+1} + \iota_{n+1} = T_n\mathbf{a} + \iota_n$$

hat man die Inklusionen $Q_n \subset Q_{n+1}$ $(n \ge m)$. Die Folge

$$n \mapsto \mathbf{q}_n := \max(Q_n) \in \mathbb{D}_n \qquad (n \ge m)$$

ist daher monoton wachsend und nach oben beschränkt durch 2^m. Nach Satz 2 existiert somit der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}_n =: \mathbf{q}$. Wir behaupten: Dieser Grenzwert ist der gesuchte Kehrwert von $\mathbf{a}$, das heisst, es gilt $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \sim \mathbf{1}$.

Beweis. Betrachte ein festes $n \geq 0$. Nach (m) gibt es ein j und ein $l \geq j$ mit

$$T_n(\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \leq T_j\mathbf{q} \cdot T_j\mathbf{a} = T_j\mathbf{q}_l \cdot T_j\mathbf{a} \leq T_l\mathbf{q}_l \cdot T_l\mathbf{a} = \mathbf{q}_l \cdot T_l\mathbf{a} \leq 1 \,.$$

Da dies für jedes n zutrifft, folgt $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \leq \mathbf{1}$.
Es gibt ein N mit $2^m + a_0 + 2 \leq 2^N$. Um nun $\mathbf{q} \odot \mathbf{a} \lneqq \mathbf{1}$ auszuschließen, nehmen wir nach (k) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$(\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \oplus \iota_r \leq \mathbf{1} \,. \tag{5}$$

Nach Konstruktion von $\mathbf{q}_n$ gilt aber für jedes $n \geq m$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 &< (\mathbf{q}_n + \iota_n)(T_n\mathbf{a} + \iota_n) = T_n\mathbf{q}_n \cdot T_n\mathbf{a} + \iota_n(\mathbf{q}_n + T_n\mathbf{a} + \iota_n) \\ &\leq T_n\mathbf{q} \cdot T_n\mathbf{a} + 2^N\iota_n \leq (\mathbf{q} \odot \mathbf{a}) \oplus 2^N\iota_n \,. \end{aligned}$$

Dies steht für $n > r + N$ im Widerspruch zu (5). □

Damit verbleibt als einzige Restanz die Ausdehnung der Multiplikation auf Faktoren $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$. Gestützt auf die Regel

$$\mathbf{x} \lneqq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (-\mathbf{x}) > \mathbf{0}$$

definieren wir

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := \begin{cases} \mathbf{0} & (\mathbf{x} \sim \mathbf{0} \ \vee \ \mathbf{y} \sim \mathbf{0}), \\ -\big((-\mathbf{x}) \odot \mathbf{y}\big) & (\mathbf{x} \lneqq \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} > \mathbf{0}), \\ -\big(\mathbf{x} \odot (-\mathbf{y})\big) & (\mathbf{x} > \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} \lneqq \mathbf{0}) \,, \\ (-\mathbf{x}) \odot (-\mathbf{y}) & (\mathbf{x} \lneqq \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{y} \lneqq \mathbf{0}) \,. \end{cases}$$

Wie man sich leicht überlegt, sind damit Kommutativität, Assoziativität sowie die Regel

$$(-\mathbf{x}) \odot \mathbf{y} \ \sim \ -(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})$$

auf ganz $\mathbb{R}$ sichergestellt, ebenso die Distributivität (n), mit $\sim$ an Stelle des Gleichheitszeichens, falls $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ dasselbe Vorzeichen haben oder eine der beteiligten Variablen $\sim \mathbf{0}$ ist. Damit verbleibt der Fall $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \lneqq \mathbf{0}$. Ist dabei $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \sim \mathbf{0}$, also $\mathbf{z} \sim (-\mathbf{y})$, so ist einerseits $\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \sim \mathbf{0}$ und anderseits auch

$$(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus \big(-(\mathbf{x} \odot \mathbf{y})\big) \sim \mathbf{0} \,.$$

Ist $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} > \mathbf{0}$, so hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) &\sim \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \oplus \mathbf{x} \odot (-\mathbf{z}) \oplus \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \\ &\sim \mathbf{x} \odot \big(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \oplus (-\mathbf{z})\big) + \mathbf{x} \odot \mathbf{z} \sim (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z}) \,, \end{aligned}$$

und analog schließt man im Fall $\mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \lneqq \mathbf{0}$.

7 Vollständigkeit

Damit ist das System $\mathbb{R}$ in allen Punkten als geordneter Körper etabliert; folglich gelten in $\mathbb{R}$ sowohl sämtliche „Regeln der Algebra“ wie die „Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen“. Ab sofort heben wir daher die speziellen Notationen der vorangehenden Abschnitte wieder auf: Die reellen Zahlen erscheinen im Weiteren nicht mehr als unendliche Folgen $\mathbf{x}$; sondern wir betrachten sie als abstrakte Individuen x, zwischen denen gewisse Bindungen bestehen. Auf die Operationszeichen $\oplus$ und $\odot$ können wir fürderhin verzichten, und an Stelle von $\mathbf{x} \lesssim \mathbf{y}$ schreiben wir ganz einfach $x < y$.

Beispiel. In $\mathbb{R}$ gibt es die Zahl $\sqrt{2}$. Zum Beweis argumentieren wir ähnlich wie bei der Konstruktion des Kehrwerts. Betrachte die Mengen

$$Q_n := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_n \;\middle|\; x > 0,\ x \cdot x \leq 2\right\} \qquad (n \geq 0)\,.$$

Für alle $x \in Q_n$ gilt $x \leq 2$, und für alle $n \geq 0$ ist $Q_n \subset Q_{n+1}$. Die Folge

$$n \mapsto q_n := \max(Q_n) \in \mathbb{D}_n \qquad (n \geq 0)$$

ist daher monoton wachsend und beschränkt, besitzt also nach Satz 2 einen Grenzwert $q \in X$, und man verifiziert leicht, dass $q \cdot q = 2$ ist.

Damit wir nicht für jede Zahl, die wir gerne hätten, ein derartiges Kunststück vorführen müssen, benötigen wir ein allgemeines Prinzip, das unter leicht zu verifizierenden Bedingungen die Existenz des angepeilten Objektes, zum Beispiel der n-ten Wurzel aus einer beliebigen reellen Zahl $c \geq 0$, garantiert. Dieses Prinzip ist natürlich die Existenz des Supremums, eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Satzes:

Satz 3. *Die Gesamtheit der reellen Zahlen sei auf irgend eine Weise in eine Untermenge A und eine Obermenge B zerlegt, d.h., es sei*

$$\mathbb{R} = A \cup B\,, \quad A \neq \emptyset\,, \quad B \neq \emptyset\,; \qquad a < b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B\,.$$

Dann gibt es eine wohlbestimmte Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$x < s \;\Rightarrow\; x \in A\,, \quad x > s \;\Rightarrow\; x \in B \qquad (x \in \mathbb{R})\,. \tag{7}$$

Die Zahl s selbst gehört entweder der Untermenge oder der Obermenge an; jedenfalls *erzeugt* s den *Schnitt* (A, B) von $\mathbb{R}$. Der in Satz 3 beschriebene Sachverhalt wird als *Ordnungsvollständigkeit* der Menge $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Beweis. Es kann höchstens ein derartiges s geben. – Die Menge $Q_n := \mathbb{D}_n \cap A$ ist nach oben beschränkt durch jegliches $b \in B$; ferner gilt $Q_n \subset Q_{n+1}$ für alle $n \geq 0$. Hiernach ist

$$n \mapsto s_n := \max(Q_n) \qquad (n \geq 0)$$

eine monoton wachsende und beschränkte Folge von reellen Zahlen. Nach Satz 2 existiert damit der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$, und wir behaupten, dass s die Eigenschaft (7) besitzt.

Betrachte ein beliebiges $x < s$. Wäre $x \in B$, so hätte man $s_n \leq x$ für alle n und folglich nach (g) auch $s \leq x$, was sich mit $x < s$ nicht verträgt.

Betrachte jetzt ein $x > s$. Nach Satz 1 gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ und ein $v \in \mathbb{D}_r$ mit $s < v \leq x$. Wäre $v \in A$, so hätte man $v \leq s_r \leq s$. Folglich ist $v \in B$ und damit auch $x \in B$. □

8 Schluss

Wir brechen hier unsere Konstruktion ab und schließen mit der folgenden Feststellung:

Satz 4. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Die Menge $M := \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset X$ der Null-Eins-Folgen ist nach Cantor überabzählbar. Gemäß dem Vorangehenden stellt

$$\phi : \quad M \to [\,0, 2\,], \qquad \mathbf{x} \to x_0 \,.\, x_1\, x_2 x_3 \ldots$$

eine surjektive Abbildung von M auf das reelle Intervall $[\,0, 2\,]$ dar, wobei jede Zahl $\xi \in [\,0, 2\,]$ höchstens zwei Urbilder besitzt. Wäre das Intervall $[\,0, 2\,]$ abzählbar, müsste sich demnach auch M abzählen lassen, was nicht der Fall ist. □

Literatur

[1] A'Campo, N.: A natural construction for the real numbers. `http://arxiv.org/pdf/math/0301015`, 1–10.

[2] Dedekind, R.: *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* 1. Aufl., 1872. In: Ges. math. Werke, Bd. 3, 315–334. Vieweg 1930.

[3] Deiser, O.: *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen.* 2. Aufl., Springer 2008.

[4] Gowers, T.: Mathematical discussions, contents page. `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/mathsindex.html`

[5] Gowers, T.: What is wrong with thinking of real numbers as infinite decimals? `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/decimals.html`

[6] Hewitt, E.; Stromberg, K.: *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[7] Holland, G.: Ein Vorschlag zur Einführung der reellen Zahlen als Dezimalbrüche. *Math.-Phys. Semesterber.* 18 (1971), 87–110.

[8] Kramer, J.: *Zahlen für Einsteiger – Elemente der Algebra und Aufbau der Zahlbereiche.* Vieweg 2008.

[9] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1930.

[10] Rautenberg, W.: *Messen und Zählen – Eine einfache Konstruktion der reellen Zahlen.* Berliner Studienreihe zur Mathematik, Bd. 18. Heldermann 2007.

[11] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis.* 2nd ed., McGraw-Hill 1964.

[12] Schönhage, A.: Von den ganzen zu den reellen Zahlen. *Math.-Phys. Semesterber.* 17 (1970), 88–96.

[13] Walter, W.: *Analysis I.* Springer 1985.

Christian Blatter
Albertus-Walder-Weg 16
CH–8606 Greifensee, Schweiz
e-mail: `christian.blatter@math.ethz.ch`