Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **65 (2010)**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 65 (2010) 127 – 130
0013-6018/10/030127-4
DOI 10.4171/EM/150

© Swiss Mathematical Society, 2010

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2011 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1281: Man bestimme den Wert der Reihen

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \left(2 + n \log\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right)$$

und

$$S^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Raymond Mortini, Metz, F

Aufgabe 1282: Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen, die (in der Dezimalschreibweise) genau eine Null enthalten und nicht durch zehn teilbar sind. Welche Zahlen aus M haben die Eigenschaft, dass die Zahl, die nach dem Weglassen der Null entsteht, ein Teiler der ursprünglichen Zahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Aufgabe 1283 (Die einfache dritte Aufgabe): Wenn man aus einer gregorianischen Periode von 400 Jahren ein beliebiges Datum auswählt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Tageszahl ungerade?

Hans Egli, Zürich, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2009

Aufgabe 1269. Die Innenfläche eines zum Teil gefüllten Sektglases habe die Form eines Rotationsparaboloids. Es sei T der tiefste Punkt im Glas (bzw. der Scheitel des Paraboloids). Das Glas wird nun in Schieflage gebracht, und man beobachtet, dass die Oberfläche der Flüssigkeit sowohl den (kreisförmigen) Rand des Glases als auch den Punkt T berührt. Zu wieviel Prozent ist das Glas gefüllt?

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 20 Zuschriften eingegangen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Alexander Bofinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Charles Delorme (Orsay, F), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Egidio Gulfi (Rovio, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Friedrich Manhart (Wien, A), Ignace Morand (Préverenges, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser berechnen durch mehr oder weniger kunstvolle Integration das Sektvolumen im geneigten Glas. Alternative Lösungen, von denen wir die von *Christian Blatter* vorstellen, bemerken die affine Äquivalenz der in Frage stehenden Volumina.

Man darf o.B.d.A. annehmen, dass das Innere V des vollen Glases durch das Paraboloid $P : z - x^2 - y^2 = 0$ und die Ebene $z - 1 = 0$ begrenzt wird, die Restflüssigkeit R durch P und die Ebene $z - x = 0$. Die affine Abbildung

$$T: \quad (x, y, z) \mapsto (x', y', z') = (2x - 1, 2y, -4x + 4z + 1)$$

bildet wegen

$$z' - x'^2 - y'^2 = 4(z - x^2 - y^2), \quad z' - 1 = 4(z - x)$$

den Bereich R auf den Bereich V ab. Damit wird

$$\frac{\mathrm{vol}(R)}{\mathrm{vol}(V)} = \frac{1}{|\det(dT)|} = \frac{1}{16} = 6.25\%.$$

Aufgabe 1270. Es seien p eine beliebige Primzahl und m eine beliebige positive ganze Zahl. Wir betrachten die Folge

$$a_n = p^{m+n} - p^m + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Man weise nach, dass die Folge eine (unendliche) Teilfolge mit paarweise teilerfremden Gliedern enthält.

Walther Janous, Innsbruck, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungen eingegangen, von denen nicht alle korrekt waren: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Peter Bundschuh verallgemeinert die Aufgabe auf die Folge $a_n = bp^n - b + 1$, wobei $b \not\equiv 1 \pmod{p}$ zu fordern ist, sonst wird jedes Glied der Folge von p geteilt. Die Aufgabe ist dann der Spezialfall $b = p^m$. Wir zeigen die Verallgemeinerung und folgen dabei der Lösung von *Joachim Klose*.

Die Teilfolge wird induktiv konstruiert. Seien $n_1 = 0 < n_2 < \ldots < n_i$ bereits derart konstruiert, dass die endliche Folge $(a_{n_k})_{1 \le k \le i}$ aus paarweise teilerfremden Gliedern besteht. Sei Q_i die Menge der Primteiler von $a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_i}$. Aus der Bedingung für b folgt jedenfalls

$$p \notin Q_i. \tag{1}$$

Sei jetzt $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$n_{i+1} > n_i \quad \text{und} \quad n_{i+1} \equiv 0 \pmod{q-1} \text{ für alle } q \in Q_i.$$

Eine solche Wahl ist stets möglich; man wähle ein geeignetes Vielfaches von $\prod_{q \in Q_i} (q-1)$.

Dann sind $a_{n_{i+1}}$ und a_{n_k} für alle $k \in \{1, 2, \ldots, i\}$ teilerfremd. Wäre nämlich q ein gemeinsamer Primteiler von $a_{n_{i+1}}$ und a_{n_k}, so müsste $q \in Q_i$ wegen $q \mid a_{n_k}$ gelten. Wegen $p \not\equiv 0 \pmod{q}$ (siehe (1)) folgte dann mit dem kleinen Satz von Fermat $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, also wäre wegen $q - 1 \mid n_{i+1}$ auch $p^{n_{i+1}} \equiv 1 \pmod{q}$, was $a_{n_{i+1}} \equiv 1 \pmod{q}$ zur Folge hätte – im Widerspruch dazu, dass q ein Primteiler von $a_{n_{i+1}}$ ist.

Aufgabe 1271 (Die einfache dritte Aufgabe). Für die reellen positiven Parameterwerte u, v, w mit $v \neq u \cdot w$ sind die Geraden

$$g_1 : x = u, \quad g_2 : y = v, \quad g_3 : y = w \cdot x$$

gegeben. Durch die Abbildung

$$\overline{x} = a \cdot x^c,$$
$$\overline{y} = b \cdot y^c$$

sind die Geraden in die Geraden

$$\overline{g}_1 : \overline{x} = \overline{u}, \quad \overline{g}_2 : \overline{y} = \overline{v}, \quad \overline{g}_3 : \overline{y} = \overline{w} \cdot \overline{x}$$

überzuführen. Dabei sind $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ebenfalls gegebene positive Zahlen mit $\overline{v} \neq \overline{u} \cdot \overline{w}$. Wie sind a, b und c zu wählen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingegangen: Alexander Bofinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D),

Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH).

Die meisten Löser argumentieren wie *Walter Burgherr*: Die Gleichungen der Bilder werden gefunden, indem man die Abbildungsgleichungen in die Urbildgleichungen einsetzt. Der Vergleich mit der Vorgabe ergibt

$$\begin{aligned} a \cdot u^c &= \overline{u}, \\ b \cdot v^c &= \overline{v}, \\ \frac{b}{a} \cdot w^c &= \overline{w}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste und die dritte Gleichung (bzw. deren Terme) und dividiert durch die zweite, so hat man

$$\frac{u^c \cdot w^c}{v^c} = \left(\frac{u \cdot w}{v}\right)^c = \frac{\overline{u} \cdot \overline{w}}{\overline{v}}.$$

Durch Logarithmieren findet man

$$c = \frac{\log\left(\frac{\overline{u} \cdot \overline{w}}{\overline{v}}\right)}{\log\left(\frac{u \cdot w}{v}\right)}$$

und durch Einsetzen

$$a = \frac{\overline{u}}{u^c} \quad \text{und} \quad b = \frac{\overline{v}}{v^c}.$$

Bemerkung: Einige Löser weisen darauf hin, dass ohne zusätzliche Voraussetzungen die Abbildung nur im ersten Quadranten definiert und bijektiv ist. Entsprechend werden nur Halbgeraden aufeinander abgebildet.