Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **65 (2010)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 65 (2010) 210 – 214
0013-6018/10/040210-5
DOI 10.4171/EM/161

© Swiss Mathematical Society, 2010

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2011 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1284: Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die folgende Identität gilt:

$$\sum_{\text{zyklisch}} \left(\sin^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\right) + \prod_{\text{zyklisch}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Aufgabe 1285: Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und (a, b) der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen a und b. Welche der Zahlen R_n, S_n und T_n $(n \geq 2)$ definiert durch

$$R_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\leq n}} (a^2+b^2), \qquad S_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\leq n\\ (a,b)=1}} (a^2+b^2), \qquad T_n = \prod_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ a^2+b^2\leq n\\ (a,b)=1\\ a\leq b}} (a^2+b^2)$$

sind Quadratzahlen?

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Aufgabe 1286 (Die einfache dritte Aufgabe): In der Ebene seien 4 verschiedene Punkte durch ihre kartesischen Koordinaten gegeben. Gesucht ist ein Quadrat so, dass auf jeder Seite oder deren Verlängerung einer der gegebenen Punkte liegt. Man berechne die Steigung einer Quadratseite aus den Koordinaten der gegebenen Punkte und diskutiere die Lösung.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2009

Aufgabe 1272. Es seien k und n ganze Zahlen mit $0 \leq k \leq n-2$, und F_m bezeichne die m-te Fibonaccizahl, welche durch die Rekursion

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{m+2} = F_m + F_{m+1} \quad (m \geq 1)$$

gegeben ist. Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = F_{i+j-1}^k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

a) Beweise, dass $\det(\mathcal{A}) = 0$.

b) Man finde Verallgemeinerungen auf allgemeine lineare Rekursionen der Ordnung 2 oder auf lineare Rekursionen höherer Ordnung.

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Jürgen Spilker (Freiburg, D) und Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH).

Die folgende Lösung entstammt der leicht bearbeiteten Zuschrift von *Walther Janous*. Wir wenden uns direkt der Verallgemeinerung b) zu.

Es sei eine lineare Rekursion zweiter Ordnung

$$x_{m+2} = a \cdot x_{m+1} + b \cdot x_m$$

derart, dass das charakteristische Polynom $\lambda^2 - a\lambda - b$ $(*)$ zwei verschiedene Nullstellen λ_1 und λ_2 besitzt.

Dann gilt $x_m = \alpha \cdot \lambda_1^m + \beta \cdot \lambda_2^m$, wobei sich α und β mittels x_0 und x_1 bestimmen lassen. Mit anderen Worten, die Folge $[x_m]_{m\geq 0}$ ist eine Linearkombination der Potenzfolgen $[\lambda_1^m]_{m\geq 0}$ und $[\lambda_2^m]_{m\geq 0}$. Folglich haben wir

$$x_m^k = (\alpha\lambda_1^m + \beta\lambda_2^m)^k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \left(\lambda_1^j \lambda_2^{k-j}\right)^m = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j y_j^m,$$

wobei sich die Koeffizienten γ_j mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes aus α und β ergeben. Die Folge $[x_m^k]_{m\geq 0}$ ist daher eine Linearkombination der Potenzfolgen $[y_0^m]_{m\geq 0}$, $[y_1^m]_{m\geq 0}, \ldots, [y_k^m]_{m\geq 0}$.

Diese Darstellung besagt aber, dass die Folge

$$\left[x_m^k\right]_{m\geq 0}$$

einer linearen Rekursion (mit konstanten Koeffizienten) der Ordnung $\leq k+1$ genügt. Der Schritt mit dem charakteristischen Polynom lässt sich nämlich umkehren. Deshalb ist aber

die $(k+2)$-te Spalte der $n \times n$-Matrix $\mathcal{A}$ linear abhängig von den vorangegangenen Spalten. Wegen $k+2 \leq n$ folgt daraus unmittelbar die Behauptung $\det(\mathcal{A}) = 0$.

Falls das charakteristische Polynom $(*)$ die doppelte Nullstelle μ besitzt, haben wir

$$x_m = \mu^m(\alpha m + \beta) \qquad \text{samt} \qquad x_m^k = \mu^{km} \sum_{j=0}^{k} \delta_j m^j,$$

und es gilt das zuvor Gesagte.

Mutatis mutandis lässt sich „das alles" sofort auf lineare Rekursionen höherer Ordnung übertragen. Es sei dazu p die Ordnung der Rekursion. Dann besteht der Term von x_m^k aus einer Summe von höchstens $\binom{p+k-i}{p-1}$ Exponential-Potenzsummanden. Somit ist die Determinante der zugehörigen $n \times n$-Matrix $\mathcal{A}$ sicher 0, wenn $n > \binom{p+k-1}{p-1}$ gilt.

Aufgabe 1273. Die Peripherie eines Kreises vom Radius r sei für den Zentriwinkel α $(0 < \alpha < 2\pi)$ mit Masse der Dichte 1 belegt, der Rest der Peripherie mit Masse der Dichte ϱ $(0 < \varrho < 1)$. Nun hängt man den Kreis an einem der beiden Dichtewechselpunkte O der Peripherie an einem Faden unter dem Einfluss der Schwerkraft auf.

a) Wie lauten die Koordinaten des Kreiszentrums Z in Abhängigkeit von ϱ und α, wenn O im Koordinatenursprung liegt, der Faden mit der positiven und die Richtung der Schwerkraft mit der negativen y-Achse zusammenfallen?

b) Welcher Zusammenhang muss zwischen α und ϱ bestehen, damit die Abweichung des Kreiszentrums Z vom (verlängerten) Aufhängefaden maximal wird?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Ergidio Gulfi (Rovio, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Alle Leser benützen die Tatsache, dass der Schwerpunkt des Kreises auf dem verlängerten Aufhängefaden liegt. Wir folgen der Lösung von *Johannnes M. Ebersold.*

a) Der Kreis werde zunächst so festgehalten, dass sein Mittelpunkt Z sich auf der y-Achse im Punkt $(0, -1)$ befindet (es wird o.B.d.A. $r = 1$ angenommen). Die Winkel α und φ mit Scheitel Z werden von ZO aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen.

Die Masse beträgt $m = \alpha + (2\pi - \alpha)\varrho = 2\pi\varrho + (1-\varrho)\alpha$, und für den Schwerpunkt S gilt

$$m \cdot x_S = -\int_0^\alpha \sin(\varphi)\,d\varphi - \varrho \int_\alpha^{2\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi = -(1-\varrho)(1-\cos(\alpha)),$$

$$m \cdot y_S = -\int_0^\alpha (1-\cos(\varphi))\,d\varphi - \varrho \int_\alpha^{2\pi} (1-\cos(\varphi))\,d\varphi = -(2\pi\varrho + (1-\varrho)(\alpha - \sin(\alpha))).$$

Mit $q = \frac{\varrho}{1-\varrho}$ gilt dann

$$x_S = -\frac{1-\cos(\alpha)}{2\pi q + \alpha}, \quad y_S = -\frac{2\pi q + \alpha - \sin(\alpha)}{2\pi q + \alpha}.$$

Sei β der Winkel $\sphericalangle ZOS$. Dann gilt für ihn

$$\tan(\beta) = \frac{x_S}{y_S} = \frac{1-\cos(\alpha)}{2\pi q + \alpha - \sin(\alpha)}.$$

Um die Gleichgewichtslage des Kreises zu erreichen, muss der Kreis um O im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel β gedreht werden. Damit ergibt sich aus $Z(0, -1)$ der gesuchte Punkt $Z(\sin(\beta), -\cos(\beta))$, d.h.

$$Z\left(\frac{1-\cos(\alpha)}{\sqrt{(1-\cos(\alpha))^2 + (2\pi q + \alpha - \sin(\alpha))^2}}, -\frac{2\pi q + \alpha - \sin(\alpha)}{\sqrt{(1-\cos(\alpha))^2 + (2\pi q + \alpha - \sin(\alpha))^2}}\right).$$

b) Damit die Auslenkung von Z bei festem ϱ maximal wird, muss auch der Winkel β und damit $\tan(\beta)$ maximal werden.

Es ist

$$\frac{d(\tan(\beta))}{d\alpha} = \frac{(2\pi q + \alpha)\sin(\alpha) - 2(1-\cos(\alpha))}{(2\pi q + \alpha - \sin(\alpha))^2}.$$

Für die maximale Auslenkung gilt demnach

$$2\pi q + \alpha = 2\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Die gewünschte Beziehung lautet daher

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi\varrho}{1-\varrho}.$$

Es ist bemerkenswert, dass sich in diesem Fall $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ ergibt, wie man leicht nachrechnet. Bei maximaler Auslenkung steht daher OS senkrecht zu ZS, und der Schwerpunkt S ist die Sehnenmitte der beiden Dichtewechselpunkte.

Aufgabe 1274 (Die einfache dritte Aufgabe). Es seien φ die Eulersche φ-Funktion und σ die Teilersummenfunktion. Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(n) = \frac{1}{n}(\varphi(n) + \sigma(n)), \quad n \in \mathbb{N}$$

und finde alle Werte von n, für welche das Minimum angenommen wird.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von 17 Lesern sind Lösungen eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D),

Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Otto M. Keiser (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CN), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Die eingegangenen Lösungen benutzen alle die Multiplikativität der Eulerfunktion $\varphi(n)$ und der Teilersummenfunktion $\sigma(n)$. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal.*

Ist $n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{k_i} > 1$ die Primfaktorzerlegung von n, so ist

$$a_n = \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < 1$$

und

$$b_n = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{p_i^{k_i}} \sum_{j=0}^{k_i} p_i^j = \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{p^{k_i}} \cdot \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{l} \frac{p_i - p_i^{-k_i}}{p_i - 1}.$$

Die Zähler von b_n nehmen ab, wenn k_i zunimmt, somit kann das Minimum von $f(n)$ nur erreicht werden, wenn alle $k_i = 1$ sind und

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{l} \frac{p_i^2 - 1}{p_i(p_i - 1)} = \prod_{i=1}^{l}\left(1 + \frac{1}{p_i}\right) > 1.$$

Ist $l > 1$, $m = n/p_l$, so ist

$$f(n) = a_m\left(1 - \frac{1}{p_l}\right) + b_m\left(1 + \frac{1}{p_l}\right) = a_m + b_m + \frac{b_m - a_m}{p_l} > a_m + b_m = f(m).$$

Das Minimum kann also nur für $l = 0, 1$ erreicht werden, d.h. $n = 1$ oder $n = p$ (Primzahl) und

$$a_1 + b_1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{resp.} \quad a_p + b_p = 1 - \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{p} = 2.$$