Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 66 (2011)

Artikel: Ist die Folge der Primzahl-Quersummen beschränkt?
Autor: Müller, Tom
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-283502

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 66 (2011) 146 – 154
0013-6018/11/040146-9
DOI 10.4171/EM/183

© Swiss Mathematical Society, 2011

Elemente der Mathematik

Ist die Folge der Primzahl-Quersummen beschränkt?

Tom Müller

Tom Müller studierte an den Universitäten Zürich und Trier. Seine Interessen liegen in den Bereichen Analysis, Zahlentheorie sowie Geschichte und Philosophie der Mathematik.

1 Einleitung

Im Rahmen einer einführenden Übung zur analytischen Zahlentheorie stellte mir ein Student die interessante Frage, ob man Primzahlen mit Quersummen größer als eine beliebige vorgegebene Konstante finden könne, oder ob alle Primzahlen Quersummen kleiner als eine bestimmte obere Schranke hätten? Wenn letzteres der Fall wäre, könnte man daraus doch ein Kriterium für die Zusammengesetztheit großer Zahlen herleiten. Mir schien es zwar höchst unwahrscheinlich, dass die Quersummen von Primzahlen beschränkt sein sollten, aber auf Anhieb konnte ich die Frage des Studenten nicht beantworten und vertröstete ihn damit, bis zur nächsten Sitzung der Sache nachzugehen und die Frage zu klären. Dies tat ich in der Hoffnung, in der gängigen Lehrbuchliteratur dahingehende Hinweise zu finden. Doch sollte diese Aussicht auf einen raschen Erfolg bald enttäuscht werden. Stattdessen fand ich nur eine verschärfte Version der Frage im Abschnitt A3 des berühmten Buches über offene Probleme in der Zahlentheorie von Richard K. Guy [4]:

> „De Koninck asks for a proof that for $k \geq 2$, k not a multiple of 3, there is always a prime whose (decimal) digits sum to k [...]."

Allen Lesern ist die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen wohl bekannt. Aber wie steht es mit der Folge der Quersummen der Dezimalziffern der Primzahlen: Ist diese Folge beschränkt oder unbeschränkt? In der vorliegenden Arbeit beantwortet der Autor diese elementare Frage, indem er die Unbeschränktheit der Folge der Primzahl-Quersummen nachweist. Darüber hinaus werden verwandte Fragestellungen untersucht; beispielsweise gibt der Autor Gegenbeispiele zu Vermutungen über das Aussehen der kleinsten Primzahlen mit vorgegebenen Quersummen.

Weiter berichtet Guy von den Fragen

> „If $\rho(k)$ is the smallest prime with digital sum k, is $\rho(k) \equiv 9 \pmod{10}$ for $k > 25$? Is it $\equiv 99 \pmod{100}$ for $k > 38$? And $\equiv 999 \pmod{1\,000}$ for $k > 59$?“

Die erste Frage von De Koninck scheint mir eine sehr schwierige Aufgabe zu sein. Die Behauptungen der beiden letzten Fragen hingegen hielt ich für wenig plausibel. Herumprobieren führte nach wenigen Minuten zum Gegenbeispiel $k = 86$. Zu diesem gesellten sich bald noch sechs weitere Gegenbeispiele mit $k \leq 580$. Diese Resultate können in einer kurzen Notiz aus dem Jahre 2005 nachgelesen werden [6].

Mittlerweile konnten weitere Gegenbeispiele im Bereich $580 < k \leq 5\,000$ ausfindig gemacht werden. Es gilt $\rho(1\,286) = 10^{143} - 11$, $\rho(1\,444) = 6 \cdot 10^{160} - 11$, $\rho(2\,306) = 4 \cdot 10^{256} - 11$, $\rho(3\,544) = 9 \cdot 10^{393} - 11$ und $\rho(4\,535) = 10^{504} - 11$ und demnach

$$\rho(1\,286) \equiv \rho(1\,444) \equiv \rho(2\,306) \equiv \rho(3\,544) \equiv \rho(4\,535) \equiv 989 \pmod{1\,000}.$$

Darüber hinaus ist die Zahl $P(2\,534) = 7 \cdot 10^{281} - 101$ die kleinste „probable prime“ mit Quersumme 2 534. Sollte diese Zahl tatsächlich eine Primzahl sein, dann würde zusätzlich $\rho(2\,534) \equiv 899 \pmod{1\,000}$ gelten. Nachzutragen aus dem Bereich $k \leq 580$ bleibt zudem noch das Gegenbeispiel $\rho(358) = 10^{40} - 201 \equiv 799 \pmod{1\,000}$. Es ist wohl davon auszugehen, dass solche Gegenbeispiele auch für bedeutend größere k immer wieder auftreten.

Doch zurück zur Eingangsfrage, ob die Quersummen der Primzahlen beschränkt sind oder nicht. In Ermangelung einer Behandlung dieser Frage in der Lehrbuchliteratur soll hier bewiesen werden, dass sie negativ zu beantworten ist. Dabei werden ausschließlich Mittel verwendet, die Studierenden im Grundstudium der Mathematik nach einer Einführung in die Analysis und die elementare Zahlentheorie zur Verfügung stehen.

2 Die Unbeschränktheit der Folge der Primzahl-Quersummen

Die nachfolgenden Beweisschritte basieren auf einem kombinatorischen Argument über die Anzahl aller natürlichen Zahlen mit vorgegebener Quersumme unterhalb einer gegebenen Schranke. Im Vergleich zur Anzahl aller Primzahlen unterhalb derselben Schranke wird einsichtig, dass die Quersummen der Primzahlen nicht beschränkt sein können.

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ wie üblich die Menge aller natürlichen Zahlen. Zudem findet das Symbol $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ Verwendung.

Es sei $q > 1$ eine natürliche Zahl und es sei n eine natürliche Zahl mit der q-adischen Darstellung $n = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \cdot q^\nu$, d.h., $c_\nu \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ für alle $\nu = 0, \ldots, m$. Wir bezeichnen die (q-adische) Quersumme von n mit $s_q(n)$. Dies bedeutet, dass $s_q(n) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu$ ist. Im Folgenden steht das Symbol $A_k^q(x)$ für die Menge aller natürlichen Zahlen $n < x$, die $s_q(n) = k$ erfüllen. Mit Hilfe dieser Notation erhalten wir das folgende Ergebnis.

Satz 2.1. *Es sei $x > 1$ eine reelle Zahl und es sei k eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\left|A_k^q(x)\right| < \left(\log_q(x) + 1\right)^k.$$

Insbesondere ist demnach die Reihe $\sum_{s_q(n)=k} \frac{1}{n}$ der Inversen aller natürlichen Zahlen mit q-adischer Quersumme k konvergent.

Beweis. 1. Wir beginnen damit, die Behauptung für die Werte $x = q^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dabei gründet der Beweis auf der nachfolgenden Beobachtung. Aus der Setzung

$$A_k^q(x) = \{m \in \mathbb{N} : m < x \text{ und } s_q(m) = k\}$$

folgt sogleich

$$A_k^q(q^n) \subset \left\{\sum_{\nu=1}^{k} q^{n_\nu} : (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in ([0, n-1] \cap \mathbb{N}_0)^k\right\} =: B_n. \tag{1}$$

Dies bedeutet, dass die Anzahl der Elemente von $A_k^q(q^n)$ kleiner als oder gleich der Anzahl der Elemente von B_n ist. Diese letztere Anzahl jedoch ist offensichtlich kleiner als oder gleich der Anzahl an Möglichkeiten, k Gegenstände (die Exponenten n_ν) in n Fächer (die Stellen der q-adischen Entwicklung) zu verteilen. Daraus folgt also $|B_n| \leq n^k$. Deshalb können wir mit (1) schließen, dass

$$\left|A_k^q(q^n)\right| \leq n^k = \left(\log_q(q^n)\right)^k < \left(\log_q(q^n) + 1\right)^k$$

gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die Behauptung für alle $x > 1$ zutrifft. Nach der Definition der Menge $A_k^q(x)$ ist es klar, dass $\left|A_k^q(x)\right|$ eine monoton wachsende Funktion von x darstellt, d.h. für $x \geq y$ erhalten wir $\left|A_k^q(x)\right| \geq \left|A_k^q(y)\right|$.

Für jedes $x > 1$ findet sich nun ein $n \in \mathbb{N}$, für das $q^{n-1} < x \leq q^n$ gilt. Dies impliziert sogleich $n - 1 < \log_q(x) \leq n$ und damit bereits $n < \log_q(x) + 1$ für alle $x > 1$. Alles in allem folgt hieraus

$$\left|A_k^q(x)\right| \leq \left|A_k^q(q^n)\right| \leq n^k < \left(\log_q(x) + 1\right)^k.$$

2. Es ist bekannt, dass die Reihensumme

$$S := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_q^2(l)}$$

für alle $q > 1$ endlich ist. Zudem ist die Ungleichung

$$\left(\log_q(x) + 1\right)^k + 1 < \frac{x}{\log_q^2(x)}$$

für alle genügend großen x erfüllt. Wir definieren als $\{n_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ die aufsteigend geordnete Folge aller natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $s_q(n_l) = k$. Dann gibt es eine natürliche Zahl L so, dass

$$l = \left|A_k^q(n_l)\right| + 1 < \frac{n_l}{\log_q^2(n_l)}$$

für alle $l > L$ gilt. Dies ist gleichbedeutend zu $l \cdot \log_q^2(n_l) < n_l$. Wegen $\log_q(n_l) \geq \log_q(l)$ folgt also $l \cdot \log_q^2(l) < n_l$ für alle $l > L$. Hieraus ergibt sich für die Reihensumme über die Inversen der Zahlen n_l die Abschätzung

$$\sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{1}{n_l} < \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_q^2(l)} < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium muss folglich die linksseitige Reihe konvergieren. Dies war zu beweisen. □

Folgerung 2.2. *Für jede natürliche Zahl k existiert eine Primzahl p mit $s_q(p) > k$.*

Beweis. Es sei k eine vorgegebene natürliche Zahl. Aus Satz 2.1 wissen wir, dass die Reihe

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ s_q(n)=t}} \frac{1}{n}$$

für alle natürlichen Zahlen t mit $1 \leq t \leq k$ konvergiert, und folglich muss die Summe

$$\sum_{t=1}^{k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ s_q(n)=t}} \frac{1}{n}$$

ebenfalls endlich sein. Man beachte hierbei, dass die letztgenannte endliche Summe bereits alle Primzahlen mit Quersummen kleiner als oder gleich k enthält. Nach einem bestens bekannten Resultat von Leonhard Euler wissen wir jedoch, dass die Reihe über die Inversen aller Primzahlen divergiert. Deshalb muss es eine Primzahl geben, deren Quersumme größer als k ist. □

Im Folgenden bezeichnen wir die Menge aller Primzahlen mit $\mathbb{P}$. Im Beweis der Folgerung 2.2 haben wir die Divergenz der Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ verwendet, um zu zeigen, dass es zu jedem vorgegebenen $k \in \mathbb{N}$ stets eine Primzahl p mit $s_q(p) > k$ gibt. Es lassen sich jedoch auch Primzahlfolgen konstruieren, die dünn genug sind, damit die Reihen über die Inversen aller jeweiligen Folgenglieder konvergieren und die zugehörigen Quersummenfolgen trotzdem nicht beschränkt sind. Es gilt nämlich das folgende Ergebnis.

Lemma 2.3. *Es seien k und $q > 1$ natürliche Zahlen. Es sei $A := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und es sei C die Zählfunktion dieser Folge, d.h.*

$$C(x) := |\{a \in A : a < x\}|$$

für $x > 1$. Wenn für alle genügend großen x die Abschätzung

$$C(x) > \frac{\left(\log_q(x) + 1\right)^{k+1} - 1}{\log_q(x)} \tag{2}$$

gilt, dann existiert mindestens ein Folgenglied $a_m \in A$ mit $s_q(a_m) > k$.

Beweis. Es sei $N_k(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n < x$ mit $s_q(n) \leq k$ für $x > 1$. Mit der Aussage von Satz 2.1 folgt, dass die Anzahl $N_k(x)$ der Abschätzung

$$N_k(x) \leq \left(\sum_{\nu=1}^{k} \left| A_\nu^q(x) \right| \right) + 1 < \sum_{\nu=0}^{k} \left(\log_q(x) + 1 \right)^\nu$$

genügt. Das Ausrechnen der geometrischen Summe auf der rechten Seite führt dann zu

$$N_k(x) < \frac{\left(\log_q(x) + 1 \right)^{k+1} - 1}{\log_q(x)}. \tag{3}$$

Nehmen wir an, die Folge A enthielte nur Glieder mit q-adischen Quersummen kleiner als oder gleich k, dann muss $C(x) \leq N_k(x)$ für alle $x > 1$ gelten. Ein Vergleich der Abschätzungen (2) und (3) hat jedoch für alle genügend großen x die Beziehung $N_k(x) < C(x)$ zur Folge. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung des Lemmas. □

Das eben gezeigte Resultat lässt sich auf einige, wesentlich „ausgedünnte" Teilfolgen der Primzahlen anwenden. Dazu führen wir noch einige Notationen ein. Es bezeichne $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die aufsteigend geordnete Folge aller Primzahlen. Mit $\pi(x)$ wird üblicherweise die Zahl der Primzahlen angegeben, die kleiner als oder gleich x sind. Ein berühmter Primzahlsatz von Tschebyscheff besagt, dass es zwei Konstanten $0 < C_1 < C_2$ gibt, so dass

$$\frac{C_1 x}{\log(x)} < \pi(x) < \frac{C_2 x}{\log(x)}$$

für alle $x > 2$ gilt (vgl. dazu etwa Theorem 7 im Lehrbuch von Hardy und Wright [5]). Eine grundlegende Konsequenz dieses Satzes ist eine Abschätzung der Größenordnung der n-ten Primzahl. Es gibt nämlich zwei Konstanten $0 < c_1 < c_2$, so dass

$$c_1 n \log(n) < p_n < c_2 n \log(n) \tag{4}$$

für alle $n > 1$ gilt (vgl. dazu Theorem 9 bei Hardy und Wright [5]). Damit stehen alle Instrumente zur Verfügung, die den Beweis des folgenden Satzes ermöglichen.

Satz 2.4. *Es seien k und $q > 1$ natürliche Zahlen. Dann enthält jede der beiden Folgen $P_1 := \{p_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $P_2 := \{p_{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Glied mit einer q-adischen Quersumme, die größer als k ist.*

Beweis. 1. Wir behandeln zunächst die Folge P_1 ausführlich; die Aussage für P_2 folgt analog. Das Einsetzen der Primzahl p_{p_n} in die Ungleichung (4) liefert

$$c_1 p_n \log(p_n) < p_{p_n} < c_2 p_n \log(p_n).$$

Abermals mit (4) ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$c_1^2 n \log(n) \log(c_1 n \log(n)) < p_{p_n} < c_2^2 n \log(n) \log(c_2 n \log(n))$$

für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$. Man beachte hier, dass die Grenzwertbeziehung $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(cn\log(n))}{\log(n)} = 1$ gilt. Dies impliziert die Existenz zweier Konstanten $c_3, c_4 > 0$ mit

$$c_3 n \log^2(n) < p_{p_n} < c_4 n \log^2(n) \tag{5}$$

für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$. Es sei nur kurz angemerkt, dass diese Abschätzung bereits die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_{p_n}^{-1}$ nach sich zieht.

Für unsere Zwecke wandeln wir den rechtsseitigen Teil von (5) um zu

$$n > \frac{p_{p_n}}{c_4 \log^2(n)}.$$

Da $n < p_{p_n}$ ist, erhalten wir damit schließlich

$$n > \frac{p_{p_n}}{c_4 \log^2\left(p_{p_n}\right)}$$

für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$. Weiter folgt für $p_{p_n} \leq x < p_{p_{n+1}}$ die Abschätzung

$$c_3 n \log^2(n) < x < c_4(n+1)\log^2(n+1).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log^2(n+1)}{n\log^2(n)} = 1$ gibt es folglich eine Konstante $c_5 > 0$ mit

$$c_3 n \log^2(n) < x < c_5 n \log^2(n)$$

für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$. Hier ist an die Tatsache zu erinnern, dass $n < p_{p_n} \leq x$ ist. Es ergibt sich demnach die Ungleichung

$$n > \frac{x}{c_5 \log^2(n)} > \frac{x}{c_5 \log^2(x)}$$

für alle genügend großen n. Die Zählfunktion $\pi_p(x) := \left|\{m \in \mathbb{N} : p_{p_m} \leq x\}\right|$ erfüllt für alle $x \in \left[p_{p_n}, p_{p_{n+1}}\right)$ somit

$$\pi_p(x) = \pi_p\left(p_{p_n}\right) = n > \frac{x}{c\log^2(x)}$$

mit der Konstanten $c := \max\{c_4, c_5\}$. Für jedes vorgegebene $k \in \mathbb{N}$ und für jedes vorgegebene $1 < q \in \mathbb{N}$ gilt die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{c\log^2(x)} - \frac{\left(\log_q(x)+1\right)^{k+1} - 1}{\log_q(x)}\right) = \infty,$$

d.h.

$$\pi_p(x) > \frac{\left(\log_q(x)+1\right)^{k+1} - 1}{\log_q(x)} + 1$$

für alle genügend großen x. Mit Lemma 2.3 folgt sogleich die Aussage des Satzes für die Folge P_1.

2. Analog ergibt sich für $\pi_{n^2}(x) := \left|\{n \in \mathbb{N} : p_{n^2} \leq x\}\right|$ mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$ und für alle genügend großen x die Beziehung

$$\pi_{n^2}(x) > \frac{\sqrt{x}}{c\log(x)}.$$

Da diese letzte Funktion von x abermals erheblich schneller gegen Unendlich wächst als der Quotient aus Ungleichung (2) ist es auch hier klar, dass zu jedem gegebenen $k \in \mathbb{N}$ stets eine Primzahl der Form p_{n^2} existiert, die $s_q\left(p_{n^2}\right) > k$ erfüllt. □

3 Primzahlen mit großen Quersummen

Wenn die Folge der Primzahl-Quersummen jedoch nicht beschränkt ist, so drängt sich die Frage auf, welches die größte bekannte (dezimale) Primzahl-Quersumme ist? Hinsichtlich einer Beantwortung dieser Frage scheint es sinnvoll, bestehende Primzahllisten nach dem Motto „Je größer die Primzahl umso größer ist wahrscheinlich auch ihre Quersumme" zu durchsuchen.

Die Zahlen, deren Quersummen am einfachsten zu ermitteln sind, sind sicherlich die Repunits $R_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} 10^\nu = \frac{10^n-1}{9}$. Diese „bestehen" nur aus Einsen, weshalb für die Quersumme stets $s_{10}(R_n) = n$ gilt. Diese Zahlen sind prim für $n = 2, 19, 23, 317, 1\,031$. Dubner, der zusammen mit Williams auch den Nachweis der Primeigenschaft von $R_{1\,031}$ erbringen konnte [8], hat zudem auch $R_{49\,081}$ als „probable prime" beschrieben [2]. Zwei weitere Primzahlkandidaten wurden mit R_p für $p = 86\,453$ und $p = 109\,297$ in der Zwischenzeit gefunden (vgl. die Ganzzahlfolge A004023 in Sloanes OEIS [7]). Nach dem heutigen Stand der Forschung kommen wir mit Repunits also maximal zu „potentiellen" Primzahlen mit einer Quersumme von 109 297.

Die zweite Familie von Primzahlen, die hinsichlich großer Quersummen von Interesse ist, sind die so genannten Proth-Primzahlen. Es sind dies Zahlen der Form $2^r \cdot h + 1$. Dabei bedeutet r eine natürliche und h eine ungerade Zahl, welche die Ungleichung $h < 2^r$ erfüllt.

Diese Zahlen sind aufgrund ihrer Bauart verhältnismäßig einfach auf die Primeigenschaft hin zu untersuchen, weshalb sie mit zu den größten überhaupt bekannten Primzahlen gehören. Gilt nämlich $h < 2^r$ und gibt es eine Primzahl p so, dass $2^r \cdot h + 1$ ein quadratischer Nichtrest modulo p ist, dann ist $2^r \cdot h + 1$ genau dann eine Primzahl, wenn

$$p^{2^{r-1}h} \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ (2^r \cdot h + 1))$$

gilt (vgl. Hardy und Wright [5], Theorem 102). Keller und Ballinger haben alle bekannten Proth-Primzahlen mit $h < 300$ auf ihrer Internetseite zusammengefasst [1]. In Anbetracht der Fülle an Daten, die bezüglich dieser Zahlen mittlerweile zusammengetragen worden sind, müssen wir uns hier auf eine kleine Auswahl beschränken. Da besonders für kleine h recht große Exponentenbereiche erschlossen sind, behandeln wir stellvertretend nur die drei Werte $h = 3$, $h = 5$ und $h = 15$, für die alle Primzahlen mit $r < 3\,941\,000$,

$r < 5\,330\,000$, bzw. $r < 1\,500\,000$ bekannt sind (Stand: 23. März 2009). Bereits die Primzahl $2^{900} \cdot 15 + 1$, die mit 273 Dezimalstellen deutlich kleiner als $R_{1\,031}$ ist, besitzt die vergleichsweise große Quersumme von 1 204. Die Primzahl $2^{3\,888} \cdot 15 + 1$ „sprengt" mit ihren 1 172 Dezimalstellen die Grenze von 5 000 mit der Quersumme 5 065. Doch es geht noch sehr viel größer. Auch die Millionengrenze lässt sich knacken. Die Parameter $r = 1\,229\,600$ und $h = 15$ führen zu einer Primzahl mit 370 148 Dezimalstellen und der Quersumme 1 666 906, die Parameter $r = 1\,418\,605$ und $h = 15$ sogar zu einer 427 044-stelligen Primzahl mit Quersumme 1 922 314. Die Primzahl $2^{1\,777\,515} \cdot 5 + 1$, die zur Zeit größte bekannte mit $h = 5$, besitzt 535 087 Dezimalstellen und die Quersumme 2 401 727. Die größte bekannte Primzahl mit $h = 3$ trägt den Exponenten $r = 2\,478\,785$, besitzt 746 190 Dezimalstellen und hat eine Quersumme von 3 358 897.

Noch größere Quersummen sollten bei den größten überhaupt bekannten Primzahlen zu finden sein. Es sind dies bekanntlich die so genannten Mersenne-Primzahlen von der Form $M_p := 2^p - 1$ mit einer Primzahl p. Die größte bisher bekannte Mersenne-Primzahl (entdeckt 2008), M_p mit $p = 43\,112\,609$ (vgl. hierzu z.B. die Internetseite des GIMPS-Projekts [3]), besitzt 12 978 189 Dezimalstellen und die Quersumme $s_{10}(M_p) = 58\,416\,637$.

Eine kuriose Begebenheit begegnet einem, wenn man die Quersummen der bekannten Mersenne-Primzahlen durchsucht. Die Primzahlen $2^{2\,203} - 1$ (664 Dezimalstellen) und $2^{2\,281} - 1$ (687 Dezimalstellen) besitzen beide die gleiche Quersumme 3 106. Diese Eigenschaft scheint ein Unikum für die Primzahlen des Mersenne-Typs zu sein; zumindest in Anbetracht der bisher bekannten Vertreter dieser Primzahlfamilie. Man beachte hierbei allerdings, dass das Phänomen allgemein bei Mersenne-Zahlen $M_n = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) doch ziemlich häufig ist. So besitzen neben den hier angegebenen Mersenne-Primzahlen auch die Mersenne-Zahlen $2^{2\,299} - 1$ und $2^{2\,371} - 1$ die Quersumme 3 106. Betrachtet man die Exponenten $n, m \in [2, 3\,000] \cap \mathbb{N}$, so gibt es insgesamt 1 548 verschiedene geordnete Paare (n, m) mit $n < m$ derart, dass $s_{10}(M_n) = s_{10}(M_m)$ gilt. Das kleinste dieser Paare ist gegeben durch $(3, 9)$ mit $s_{10}(7) = s_{10}(511) = 7$; das größte Paar ist $(2\,880, 3\,000)$ mit den zugehörigen Quersummen vom Wert 3 870.

Zur Berechnung der hier vorgestellten Quersummen wurden die einzelnen Dezimalstellen der gegebenen Primzahlen zunächst explizit berechnet und dann sukzessive aufaddiert. Die Berechnung der größten bekannten Primzahlquersumme benötigte dabei knapp drei Tage auf einem PC, der von einem AMD Sempron 2600 XP+ Prozessor betrieben wird.

Die hinsichtlich ihrer Quersumme wohl „ergiebigsten" Primzahlen dürften jedoch diejenigen sein, die aus möglichst großen Ziffern zusammengesetzt sind. Da eine Zahl, die ausschließlich mit der Ziffer 9 gebildet wird, stets zusammengesetzt ist, sind die ersten Kandidaten jene Zahlen, die bis auf eine Dezimalstelle aus Neunen bestehen. Die Ausnahmeziffer ist dabei idealerweise gleich 8, bzw. 7 falls sie am Ende der Zahl steht. Beispielsweise sind die Zahlen $10^{990} - 3$ und $10^{1\,887} - 3$ sehr wahrscheinlich Primzahlen mit 990 und 1 887 Dezimalstellen. Ihre Quersummen sind mit 8 908 und 16 981 verhältnismäßig gigantisch.

Wie lange wird es dauern, bis man Primzahlen mit Quersummen größer als 100 Millionen entdeckt? Wann wird die „Schallmauer" von 10^9 durchbrochen? Es ist davon auszugehen, dass theoretische Erfolge, u.a. zu der in der Einleitung angesprochenen Vermutung von De Koninck, diesen Prozess erheblich beschleunigen könnten.

Literatur

[1] Ballinger, R.; Keller, W.: List of primes $k \cdot 2^n + 1$ for $k < 300$. http://www.prothsearch.net/riesel.html (Stand 23. März 2009).

[2] Dubner, H.: Repunit R49081 is a probable prime. *Math. Comp.* 71 (2002), 833–835.

[3] GIMPS-Homepage. http://www.mersenne.org (Stand: 23. März 2009).

[4] Guy, R.K.: *Unsolved Problems in Number Theory*. Springer Verlag, New York 2004 (3rd edition), 15.

[5] Hardy, G.H.; Wright, E.M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Claredon Press, Oxford 1979 (5th edition).

[6] Müller, T.: A negative answer to two questions about the smallest prime numbers having given digital sums. *Integers* 5 (2005), #A10.

[7] Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). http://www.research.att.com/~njas/sequences/ (Stand: 23. März 2009).

[8] Williams, H.C.; Dubner, H.: The Primality of R1031. *Math. Comp.* 47 (1986), 703–711.

Tom Müller
Forschungsstelle für interdisziplinäre Geisteswissenschaft
Institut für philosophische Bildung
Alanus-Hochschule für Kunst und Gesellschaft
Villestr. 3
D-53347 Alfter bei Bonn, Deutschland
e-mail: tom.mueller@alanus.edu