Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **66 (2011)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 66 (2011) 38 – 42
0013-6018/11/010038-5
DOI 10.4171/EM/168

© Swiss Mathematical Society, 2011

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2011 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1287: In einem Tangentenviereck errichtet man die Mittelsenkrechten der vier Seiten. Man beweise vorzugsweise geometrisch, dass das von den Mittelsenkrechten gebildete Viereck wieder ein Tangentenviereck ist.

Peter Gallin, Bauma, CH und Daniel Stoffer, Zürich, CH

Aufgabe 1288:

a) Auf wieviele Arten lässt sich ein $3 \times 2m$-Rechteck R_m mit 1×2-Dominosteinen parkettieren?

b) Man beantworte die analoge Frage für $3 \times (2m-1)$-Rechtecke R_m^*, denen ein Eckfeld fehlt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1289 (Die einfache dritte Aufgabe): Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1$. Man beweise für $b = \sqrt[3]{4/3} = 1.10\ldots$, dass für die Lösung $y(x)$ gilt:

$$\frac{1}{1-x} < y(x) < \frac{1}{1-bx}, \quad 0 < x < \frac{1}{b}.$$

Frieder Grupp, Schweinfurt, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2010

Aufgabe 1275. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, und P sei ein Punkt der Seite $a = BC$. Von P aus werden die Lote auf die Seiten $b = CA$ und $c = AB$ errichtet, und P_b resp. P_c seien die Lotfusspunkte.

1. Wo auf der Seite a ist $P = \hat{A}$ zu wählen, damit das Viereck $AP_c\hat{A}P_b$ maximale Fläche erhält?
2. Es seien $\hat{B}$ und $\hat{C}$ auf den Seiten b und c analog definiert. Beweise, dass die drei Geraden $A\hat{A}$, $B\hat{B}$ und $C\hat{C}$ sich im Umkreiszentrum des Dreiecks ABC schneiden.

Mowaffaq Hajja, Irbid, JO und Panagiotis Krasopoulos, Athen, GR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 25 Lösungen eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Alex Frei (Au, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Ergidio Gulfi (Rovio, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Stephan Kocher (Sangernboden, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Friedrich Manhart (Wien, A), Ignace Morand (Préverenges, CH), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Victor Pambuccian (Phoenix, USA), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (München, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Viele Löser algebraisieren die Aufgabe mehr oder weniger. Wir präsentieren die leicht bearbeitete Lösung von *Hans Egli*, der rein geometrisch argumentiert (Fig. 1 auf Seite 40).

Damit die Fläche des Vierecks minimal wird, muss die Verbindung der Lotfusspunkte P_cP_b parallel zu BC sein. Sei $P \in BC$ auf diese Weise charakterisiert und sei P' ein von P verschiedener Punkt auf BC und dessen Lotfusspunkte auf AB und AC seien P'_c und P'_b. Weiter seien D und E die Schnittpunkte von P_cP_b mit $P'P'_c$ respektive mit $P'P'_b$.

Die Parallelogramme $PP'DP_c$ und $PP'EP_b$ haben die gleiche Fläche. Damit verringert sich die Vierecksfläche um die Dreiecke $\triangle P_cDP'_c$ und $\triangle P_bEP'_b$, wenn man vom Viereck AP_cPP_b zum Viereck $AP'_cP'P'_b$ übergeht. Dies beweist Teil 1 der Aufgabe.

Errichtet man in B und C die Lote zu AB respektive AC, so ist, wegen der Parallelität $BC \parallel P_cP_b$, das entstehende Sehnenviereck $ABQC$ affin äquivalent zu AP_cPP_b. Deshalb sind A, P, Q kollinear und wegen der rechten Winkel ist AQ ein Durchmesser des Umkreises von $\triangle ABC$. Damit ist Teil 2 ebenfalls gezeigt.

Aufgabe 1276. Beweise, dass

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{96}{(14k+1)(14k+9)(14k+11)}\right)=2.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

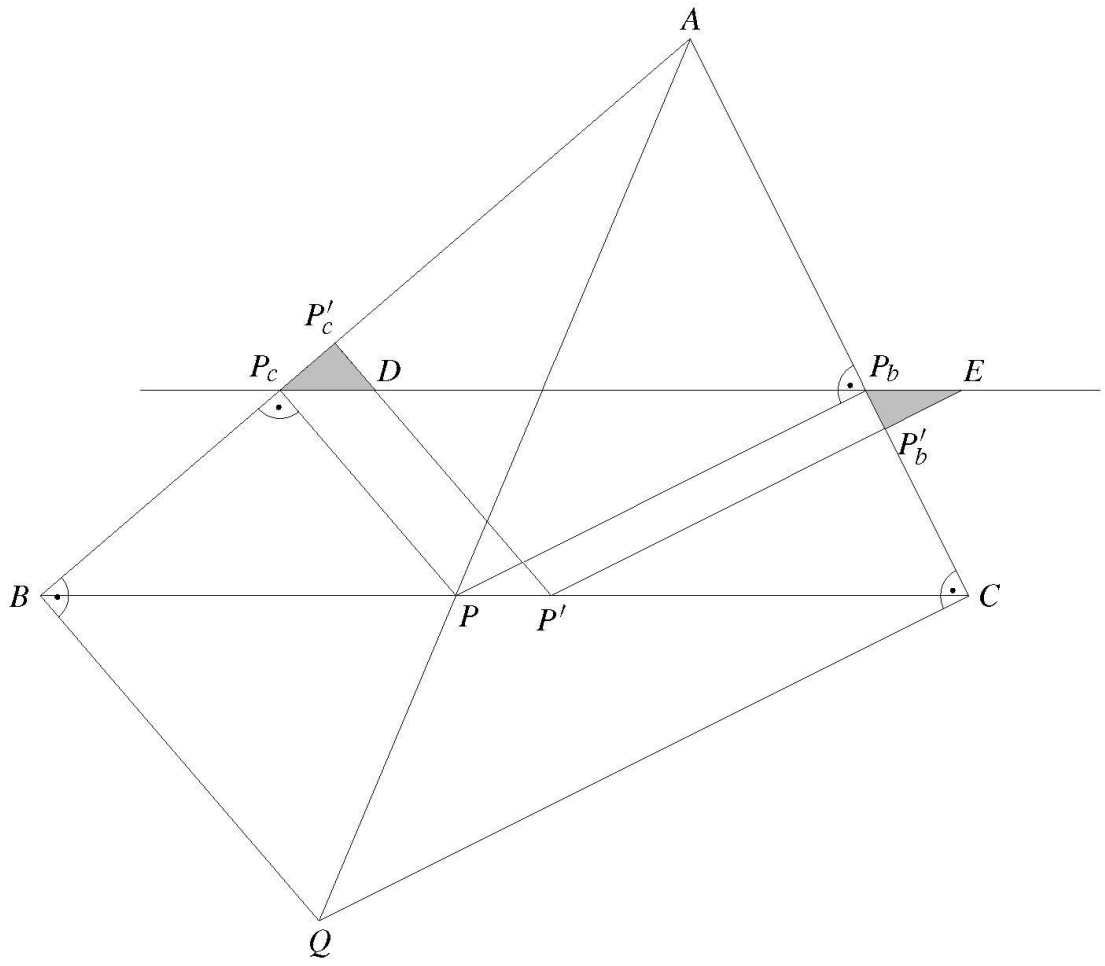


Fig. 1

Auswertung der eingesandten Lösungen. 9 Löser haben Zuschriften eingesandt: Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Sangernboden, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Die meisten Leser bemerken, dass sich das Produkt durch die Gammafunktion ausdrücken lässt und verwenden dann ihre Eigenschaften, um die behauptete Identität zu zeigen. Wir folgen der Lösung von *Friedhelm Götze*, der die Behauptung elementar zeigt.

Nach leichter Umformung lautet das unendliche Produkt

$$p := \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{14k+13}{14k+1} \cdot \frac{14k+5}{14k+9} \cdot \frac{14k+3}{14k+11} \right),$$

wofür sich (im Hinblick auf die weitere Beweisführung) auch schreiben lässt

$$p = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7(2k+1)+6}{7(2k+1)-6} \cdot \frac{7(2k+1)-2}{7(2k+1)+2} \cdot \frac{7(2k+1)-4}{7(2k+1)+4} \right). \tag{1}$$

Definieren wir jetzt

$$f(k) := \frac{7k+6}{7k-6} \cdot \frac{7k-2}{7k+2} \cdot \frac{7k-4}{7k+4}, \tag{2}$$

so erkennt man, dass sich in (1) das Produkt über alle ungeradzahligen l von $f(l)$ erstreckt. Es liegt deshalb nahe, $p = \prod_{k=0}^{\infty} f(2k+1)$ unter Verwendung von $\prod_{k=1}^{\infty} f(k)$ und $\prod_{k=1}^{\infty} f(2k)$ zu ersetzen durch

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{f(2k)}. \tag{3}$$

Dabei ist wegen (2)

$$f(2k) = \frac{7k+3}{7k-3} \cdot \frac{7k-1}{7k+1} \cdot \frac{7k-2}{7k+2}. \tag{4}$$

Mittels (2) und (4) erhält man aus (3)

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(7k-3)(7k-4)}{(7k-1)(7k-6)} \cdot \frac{(7k+1)(7k+6)}{(7k+3)(7k+4)} \right). \tag{5}$$

Das Produkt lässt sich aufspalten, denn, wie man sieht, sind

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(7k-3)(7k-4)}{(7k-1)(7k-6)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{6}{(7k-1)(7k-6)} \right)$$

und

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(7k+1)(7k+6)}{(7k+3)(7k+4)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{6}{(7k+3)(7k+4)} \right)$$

konvergent.

So ist dann mit der Umbenennung $k \to k+1$ im ersten Teil von (5)

$$p = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(7k+4)(7k+3)}{(7k+6)(7k+1)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(7k+1)(7k+6)}{(7k+3)(7k+4)} = 2.$$

Es bleibt nämlich nur der erste Faktor mit $k = 0$ des ersten Produkts übrig.

Bemerkung: Zwei Löser weisen darauf hin, dass fast die gleiche Aufgabe als Problem 11426 des *American Mathematical Monthly* erschienen ist.

Aufgabe 1277 (Die einfache dritte Aufgabe). Die vier Seitenflächentrapeze eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfs weisen einen Neigungswinkel von α $(0 < \alpha < \pi)$ gegenüber der Grundfläche auf und werden nach aussen in diese umgeklappt. Der Winkel zwischen zwei Schenkeln benachbarter Seitenflächentrapeze betrage dann β. Welche Beziehung besteht zwischen α und β?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

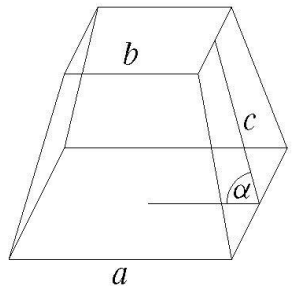
Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (München, D).

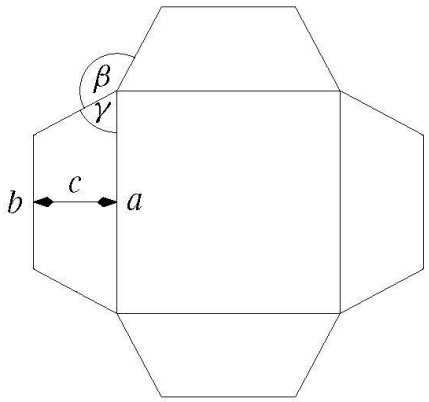
Die Beziehung zwischen den Winkeln α und β wurde in den eingegangenen Lösungen in verschiedensten äquivalenten Beziehungen ausgedrückt. Die meisten Löser sind dabei ähnlich vorgegangen wie *Michael Vowe*, dessen leicht bearbeitete Ausführungen wir hier präsentieren.

Es sei a die Seite der Grundfläche, b die Seite der Deckfläche und $b < a$, also $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Die Höhe eines ausgeklappten Seitentrapezes sei c, und der Basiswinkel γ.

Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{(a-b)/2}{c} \quad \text{und} \quad \tan(\gamma) = \frac{c}{(a-b)/2} \quad \text{oder} \quad \tan(\gamma) = \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$





Weiterhin gilt

$$\beta = 2\pi - 2\gamma - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan(\cos(\alpha)).$$

Für den Fall $b > a$, also $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ergibt sich mit analogen Überlegungen dieselbe Formel.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ behält die Formel ihre Gültigkeit: $a = b$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Diese Formel kann noch in die Form

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

gebracht werden.