Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **67 (2012)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 67 (2012) 84 – 87
0013-6018/12/020084-4
DOI 10.4171/EM/197

© Swiss Mathematical Society, 2012

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2012 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1302: Mit der Rekursionsformel $f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x)$ und $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ werden Polynome $f_n(x)$ vom Grad n definiert. Man bestimme die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = f_{n-1}(x)$.

André Ammann, Yverdon, CH und Lucien Pianaro, Annecy-le-Vieux, F

Aufgabe 1303: Es sei $2 \leq k \leq 9$.

a) Die Summe von k aufeinanderfolgenden Quadratzahlen soll eine Dreieckszahl sein.

b) Die Summe von k aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen soll eine Quadratzahl sein.

In beiden Fällen sind diejenigen Werte von k gesucht, für die es unendlich viele Lösungen gibt. Die Lösungen sind dann rekursiv zu beschreiben.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1304 (Die einfache dritte Aufgabe): In Restaurants wird um den Stiel eines Tulpenglases oft ein aufgeschnittener Kreisring mit den Radien r, R $(0 < r < R)$ aus saugfähigem Papier gelegt. Dieses kann man zum Spielen entfernen und durch Überlappen der Papierschnittlinien zu einem Kreiskegelstumpf verformen.

Wie gross wird die Höhe des Kegelstumpfes in Abhängigkeit der Überlappungslänge u $(0 \leq u < 2\pi R)$ gemessen auf der äusseren Kreislinie des Papiers?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2011

Aufgabe 1290. Seien a, b, c reelle nichtnegative Zahlen mit $a + b + c = 1$. Zeige, dass dann

$$0 \leq 4(ab + bc + ca) - 9abc \leq 1$$

gilt.

Michael Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 20 Lesern eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Georghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Sangernboden, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel), Albert Stadler (Herrliberg, CH), John Steinig (Genève, CH), Lienhard Wimmer (München, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungsmethoden zerfallen grundsätzlich in drei Kategorien. Erstens werden die Ungleichungen direkt elementar nachgewiesen, dabei wird meist die Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel benutzt. Zweitens wird ein Extremalproblem mit Nebenbedingung gelöst oder drittens werden elementarsymmetrische Funktionen und die Ungleichung von Schur benutzt. Wir folgen der Lösung von *François Sigrist*, der das Extremalproblem elementar handhabt.

Ist a fixiert und setzt man $c = 1 - a - b$, so bleibt die Funktion

$$F(b) = 4(ab + ac + ca) - 9abc = b^2(9a - 4) - b(1 - a)(9a - 4) + 4a(1 - a)$$

auf dem Intervall $0 \leq b \leq 1 - a$ zu untersuchen. Man stellt leicht fest, dass $F(0) = F(1 - a) = 4a(1 - a)$ für die in Frage kommenden Werte von a im Intervall $[0, 1]$ liegt. Da die Funktion $F(b)$ quadratisch ist, genügt es nachzuweisen, dass $0 \leq F\left(\frac{1-a}{2}\right) \leq 1$ gilt. Setzt man jetzt

$$G(a) = F(\tfrac{1-a}{2}) = \tfrac{1-a}{4}(9a^2 + 3a + 4),$$

so gilt $G(0) = 1$ und $G(1) = 0$. Die Ableitung $G'(a) = \frac{1}{4}(-27a^2 + 12a - 1)$ hat die Nullstellen $a = \frac{1}{9}$ und $a = \frac{1}{3}$. Im ersten Fall gilt $G(\frac{1}{9}) = \frac{80}{81}$ (lokales Minimum) und im zweiten Fall $G(\frac{1}{3}) = 1$ (lokales Maximum). Daher ist $G(a) \leq 1$; $G(a) \geq 0$ ist evident.

Aufgabe 1291. Von einem Viereck $ABCD$ seien die Seiten $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ sowie der Diagonalenwinkel ε, der der Seite a gegenüberliegt, vorgegeben. Man konstruiere das Viereck.

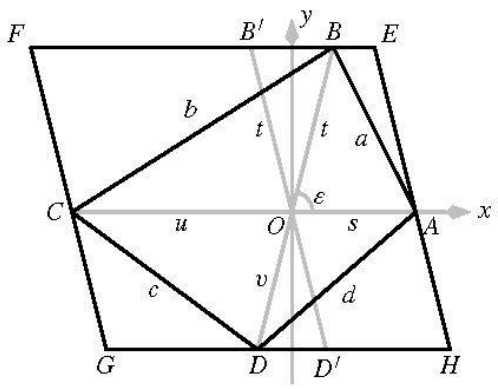
Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

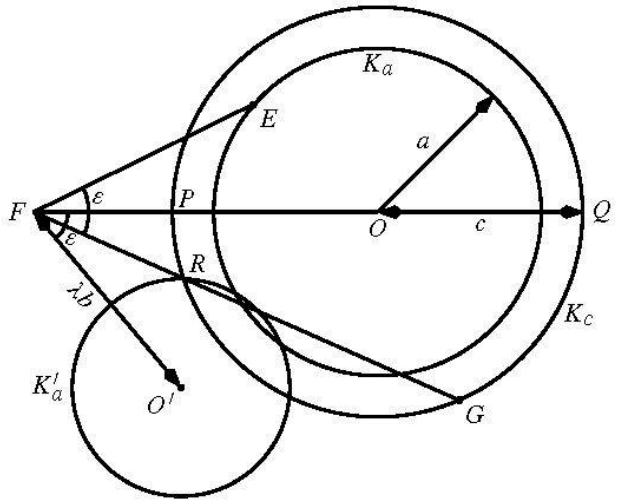
Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 7 Leser haben Beiträge eingesandt: Georghe Bercea (München, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Einige Löser zeigen rechnerisch, dass eine Konstruktion möglich ist. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*, der eine vollständige Konstruktion angibt.

Man spiegelt DB an $Oy \perp AC$ zu $B'D'$ und konstruiert das Parallelogramm $EFGH$ mit $FE \parallel CA \parallel GH$ und $HE \parallel B'D' \parallel FG$. Man sieht aus dem Cosinussatz: $OE^2 = s^2 + t^2 - 2st\cos(\varepsilon) = a^2$, $OF^2 = t^2 + u^2 + 2tu\cos(\varepsilon) = b^2$, usw.

$$k = b^2 - a^2 + d^2 - c^2 = 2\cos(\varepsilon)(st + tu + uv + vs) = 2\cos(\varepsilon)FE \cdot FG$$





Konstruktion eines Dreiecks EFG mit

$$OE = a,\ OF = b,\ OG = c,\ \sphericalangle EFG = \varepsilon,\ k = 2\cos(\varepsilon)FE \cdot FG.$$

Wir dürfen $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ annehmen, somit $k > 0$, dann z.B. $b > c$. Wir wählen zuerst O und F mit $OF = b$. Wir setzen $\lambda = \frac{2\cos(\varepsilon)(b^2-c^2)}{k}$ und transformieren Kreis K_a zu K'_a durch eine Abbildung $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, wobei φ_2 eine zentrische Streckung mit Zentrum F und Faktor λ und φ_1 eine Drehung um F mit Winkel ε ist.

Der Punkt R ist ein Schnittpunkt von K'_a mit K_c, der Punkt G der zweite Schnittpunkt von FR mit K_c und $E = \varphi^{-1}(R)$. Damit ist $\sphericalangle EFG = \sphericalangle EFR = \varepsilon$. Da $FR \cdot FG = FP \cdot FQ = b^2 - c^2$ und $FR = \lambda FE$ gelten, hat man $FE \cdot FG = \lambda^{-1}FR \cdot FG = \lambda^{-1}(b^2 - c^2) = \frac{k}{2\cos(\varepsilon)}$. Daher sind alle Bedingungen erfüllt.

Aus $OEFG$ lässt sich leicht $ABCD$ rekonstruieren: $COA \parallel FR$, $D'OB' \parallel FG$ und DOB das Spiegelbild davon, usw.

Eine genaue Analyse ergibt, dass im Fall $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ unendlich viele Lösungen existieren und andernfalls die Bedingungen

$$|ac - bd| \leq \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2\cos(\varepsilon)} \leq ac + bd$$

gelten müssen. Ist eine der Ungleichungen eine Gleichung, so gibt es nur eine Lösung, sonst deren zwei.

Zwei Löser bemerken, dass sich aus den Angaben die Fläche des Vierecks konstruieren lässt und dass die Konstruktion eines Vierecks aus den vier Seiten und der Fläche in der Literatur bekannt ist: Problème 418 in Jacques Hadamards *Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane)*, Paris, 1898, p. 307.

Aufgabe 1292 (Die einfache dritte Aufgabe). Bei welchen zwei Rechtecken mit gleichem Umfang und ganzzahligen Seitenlängen ist der Flächeninhalt des einen die Hälfte des anderen?

Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 23 Leser haben Lösungen zugeschickt, von denen nicht alle richtig waren: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Georghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Alexander Bofinger (Timişoara, RO), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Egidio Gulfi (Rovio, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Stephan Kocher (Sangernboden, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Der Schlüssel der Aufgabe ist, zu erkennen, dass die Diagonale des grösseren Rechtecks ebenfalls ganzzahlig sein muss. Wir folgen der leicht bearbeiteten Lösung von *Dieter Koller*.

Seien a und b bzw. p und q die Länge und Breite des grösseren bzw. des kleineren Rechtecks. Gesucht sind dann natürliche Zahlen a, b, p, q mit

$$p + q = a + b \qquad \text{und} \qquad 2pq = ab.$$

Daraus lässt sich einfach

$$(p - q)^2 = a^2 + b^2$$

gewinnen. Mit o.B.d.A. $p > q$ und $c = p - q$ ist (a, b, c) ein pythagoräisches Tripel $a^2 + b^2 = c^2$ und man erhält für die Seiten des kleinen Rechtecks

$$(p, q) = \left(\frac{a + b + c}{2}, \frac{a + b - c}{2}\right).$$

In primitiven pythagoräischen Tripeln sind die Zahlen $a + b$ und c ungerade, daher sind die Zähler gerade und p und q ganzzahlig. Da jedes pythagoräisches Tripel Vielfaches eines primitiven ist, sind p und q ganzzahlig für alle pythagoräischen Tripel.