# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **68 (2013)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Elem. Math. 68 (2013) 173 – 177
0013-6018/13/040173-5
DOI 10.4171/EM/236

© Swiss Mathematical Society, 2013

Elemente der Mathematik

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2014 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1320:** Man setzt voraus, dass die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit reellen Koeffizienten $p, q$ verschiedene reelle Lösungen $x, y$ besitzt. Diese können bei gegebenem $p, q$ aus dem nicht-linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + p &= 0 \\ xy - q &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des bekannten Newtonschen Verfahrens zur Nullstellenbestimmung für zwei Unbekannte iteriert werden.

Welche Iterationsgleichungen erhält man so, und bei welcher Lage der verschieden gewählten (reellen) Startwerte $x_0$, $y_0$ bezüglich der exakten Lösungen $x, y$ bricht das Verfahren ab?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1321:** Gegeben seien die Seiten eines konvexen Sehnen-$n$-Ecks ($n \geq 5$). Man berechne den Flächeninhalt desselben. Man führe die Rechnung explizit numerisch durch in den folgenden beiden Fällen:

a) Sehnen-5-Eck mit den Seiten 18, 11, 6, 4, 3.

b) Sehnen-7-Eck mit den Seiten 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

**Aufgabe 1322 (Die einfache dritte Aufgabe):** Für feste ganzzahlige $m \geq 0$ betrachte man die Diagonalsummen

$$a_{n,m} = \sum_{j \geq 0} \binom{n - jm}{j}$$

im Pascal-Dreieck. Welcher Rekursion genügt die Folge $a_{n,m}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2012

**Aufgabe 1308.** Seien $a$ und $b$ positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise, dass

$$\frac{83}{90} < a^{\tan\left(\frac{\pi b}{2}\right)} + b^{\tan\left(\frac{\pi a}{2}\right)} \leq 1.$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Beiträge von folgenden 5 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Paul Weisenhorn (Achern, D).

Alle Leser mussten sich mehr oder weniger auf numerische Berechnungen stützen. Wir folgen der Lösung von *Hans Brandstetter*.

Wir lösen die Aufgabe, indem wir Maximum und Minimum der (auf den Rand stetig fortgesetzten) Funktion

$$f(a, b) = a^{\tan\left(\frac{\pi}{2} b\right)} + b^{\tan\left(\frac{\pi}{2} a\right)} \quad \text{mit} \quad a + b = 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0$$

suchen. Im Funktionsterm von $f$ können wir auf Grund der Nebenbedingung die Variable $b$ durch $b = 1 - a$ ersetzen. Dadurch bekommen wir eine Funktion in einer Variable. Von dieser Funktion müssen wir Maximum und Minimum auf dem Intervall $[0, 1]$ bestimmen.

Ein Blick auf den Funktionsgraphen von $g(a) = f(a, 1 - a)$ zeigt uns das Problem. Für Maxima kommen die Randpunkte und die Stelle $a = \frac{1}{2}$ in Frage. Es gilt:

$$\lim_{a \to 0^+} g(a) = g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{a \to 1^-} g(a) = 1.$$

Dass der Hochpunkt tatsächlich genau an der Stelle $a = \frac{1}{2}$ liegt, kann man zeigen, indem man nachweist, dass $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ und $g''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ gilt.

Wegen $g\left(\frac{1}{2} + x\right) = g\left(\frac{1}{2} - x\right)$ ist die Funktion symmetrisch bezüglich $x = \frac{1}{2}$ und es reicht den Minimalwert in der Nähe von 0.25 genauer zu untersuchen. Mit dem Newtonschen Näherungsverfahren können wir die Minimalstelle mit beliebiger Genauigkeit bestimmen. Wir legen links vom Tiefpunkt und in dessen Nähe eine Tangente an die Kurve, wobei wir sowohl den Funktionswert als auch die negative Steigung der Tangente nach unten runden. Damit liegt die Tangente auf dem Intervall $[0, 1]$ auf jeden Fall unterhalb der Kurve. Dann

zeigen wir, dass alle Werte der Tangente grösser als $\frac{83}{90}$ sind. Als Stelle der Tangente wählen wir $a = 0.26175$. Wir bekommen

$$g(0.26175) = 0.922291\ldots \quad \text{und} \quad g'(0.26175) = -0.0000339532\ldots$$

Die Gerade $t(a) = 0.92229 - 0.0000336(a - 0.26175)$ liegt mit den vorgenommenen Rundungen sicher unterhalb der Kurve. Da die Gerade $t(a)$ negative Steigung hat, ist ihr kleinster Wert auf dem Intervall $[0, 1]$ an der Stelle $a = 1$. Der nach unten gerundete Wert der Gerade $t(a)$ an der Stelle $a = 1$

$$t(1) = 0.922265 > \frac{83}{90} = 0.9222222\ldots$$

ist somit immer noch grösser als die angegebene untere Grenze der Ungleichung.

**Aufgabe 1309.** Einem Kreisringsektor mit den Radien $r$, $R$ mit $0 \leq r < R$ und dem Zentriwinkel $\alpha$ mit $0 < \alpha \leq \pi/2$ soll ein Rechteck mit möglichst kleinem Flächeninhalt so umschrieben werden, dass mindestens eine Rechteckseite Tangente des äusseren Kreises ist. Man ist geneigt, dazu der symmetrischen Lage mit einer Rechteckseite als Scheitelpunktstangente des äusseren Kreises den Vorzug zu geben.

Wenn aber der innere Radius $r$ (bezüglich $R$) genügend klein ist, stösst man auf eine günstigere Lösung.

Man finde dazu ohne Einsatz der Differentialrechnung eine Bedingung für $r$ in Abhängigkeit von $R$ und $\alpha$.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

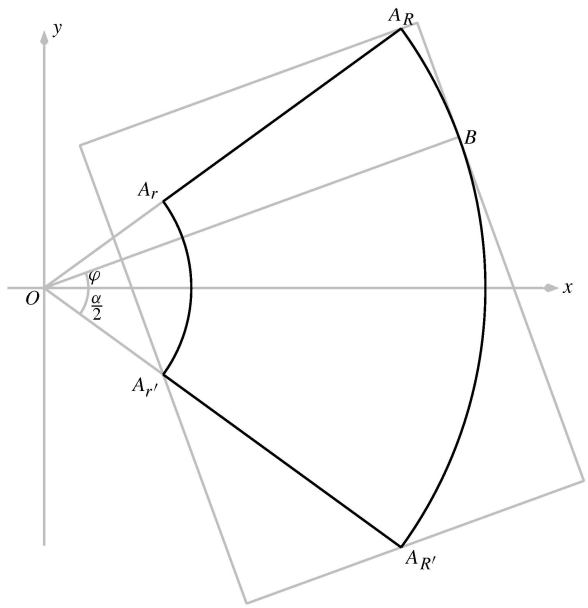
**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 10 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Paul Weisenhorn (Achern, D) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Alle Löser finden die Bedingung, indem sie die symmetrische Lösung mit derjenigen vergleichen bei welcher eine Seite des Sektors auf einer Rechteckseite liegt. Nur wenige Leser zeigten, dass es dann dazwischen kein weiteres Minimum mehr geben kann. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*.

Wir legen den Kreisringsektor so in ein Koordinatensystem, dass der Mittelpunkt der Kreise der Ursprung ist und der Kreisringsektor achsensymmetrisch zur $x$-Achse liegt. Die „Eckpunkte“ des Kreisringsektors sind dann

$$A_R\Big(R\cos\big(\tfrac{\alpha}{2}\big), R\sin\big(\tfrac{\alpha}{2}\big)\Big), \quad A_{R'}\Big(R\cos\big(\tfrac{\alpha}{2}\big), -R\sin\big(\tfrac{\alpha}{2}\big)\Big),$$
$$A_r\Big(r\cos\big(\tfrac{\alpha}{2}\big), r\sin\big(\tfrac{\alpha}{2}\big)\Big), \quad A_{r'}\Big(r\cos\big(\tfrac{\alpha}{2}\big), -r\sin\big(\tfrac{\alpha}{2}\big)\Big).$$

Weiterhin sei $B(R\cos(\varphi), R\sin(\varphi)),\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}$ der Berührungspunkt der Tangente.




Dann ist die Länge einer Seite des Rechtecks die Länge $L_1$ des Projektionsvektors $\vec{b} := \overrightarrow{A_{R'}A_R} = \left(0, 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^T$ auf den Richtungsvektor $\vec{a} := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$ der Tangente, also

$$L_1 = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a}\right| = 2R\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos(\varphi).$$

Die Länge der anderen Seite des Rechtecks ist die Länge $L_2$ des Projektionsvektors $\vec{b} := \overrightarrow{A_{r'}B} = \left(R\cos(\varphi) - r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), R\sin(\varphi) + r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^T$ auf den Richtungsvektor $\vec{a} := (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$ der Gerade $OB$, also

$$L_2 = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a}\right| = R - r\cos\left(\tfrac{\alpha}{2} + \varphi\right).$$

Somit ist die Fläche $F(\varphi)$ des Rechtecks

$$F(\varphi) = 2R\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left(R - r\cos\left(\tfrac{\alpha}{2} + \varphi\right)\right)\cos(\varphi).$$

Es ist

$$F\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - F(0) < 0 \Leftrightarrow (R - r\cos(\alpha))\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) < R - r\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow r < \frac{R}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Dass es genügt, $F$ an der Stelle $\frac{\alpha}{2}$ zu betrachten, wird gerechtfertigt durch

$$\begin{aligned} F(\varphi) - F(0) &= 2R\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left(R(\cos(\varphi) - 1) + r\left(\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - \cos(\varphi)\cos\left(\tfrac{\alpha}{2} + \varphi\right)\right)\right) \\ &= 2R\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\sin(\varphi)\underbrace{\left(r\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos(\varphi) - \tan\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\left(R - r\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)(1+\cos(\varphi))\right)\right)}_{(*)}. \end{aligned}$$

Da die Funktion $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ im offenen Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und die Funktion $\cos(\varphi)$ streng monoton fallend ist, gibt es in diesem Intervall höchstens einen Wert $\varphi$ mit $F(\varphi) = F(0)$, nämlich falls der Faktor $(*)$ gleich Null ist.

**Aufgabe 1310 (Die einfache dritte Aufgabe).** Für wieviele natürliche Zahlen $n < 10^6$ ist die alternierende Ziffernsumme gleich 0?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 17 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen:

Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Charles Delorme (Paris, F), Hans Egli (Zürich, CH), Alex Frei (Au (SG), CH), Daniel Fritze (Berlin, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Paul Weisenhorn (Achern, D), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Anzahl lässt sich über eine Fallunterscheidung der Anzahl Ziffern bestimmen oder aber über die Summen der positiv zu zählenden Ziffern. Ein weiterer Ansatz besteht daraus, einen Koeffizienten eines geeigneten Polynoms zu bestimmen. Diesem Ansatz folgte auch *Charles Delorme*, der das Problem zugleich verallgemeinerte.

Wir stellen das Problem in einen allgemeineren Rahmen und arbeiten mit der Basis $p$. Dann gibt es $p$ Ziffern $0, 1, \ldots, p-1$. Die Anzahl Möglichkeiten einer (maximal) $k$-stelligen Zahl mit Quersumme $q$ $(0 \le q \le k(p-1))$ ist gleich dem Koeffizienten $f_q$ von $X^q$ im Polynom $F_k = (1 + X + \cdots + X^{p-1})^k = \sum_{q=0}^{k(p-1)} f_q X^q$.

Die Anzahl Möglichkeiten einer $2k$-stelligen Zahl mit alternierender Ziffernsumme Null ist dann die Summe $\sum_{q=0}^{k(q-1)} f_q^2$. Da das Polynom $F_k$ reziprok ist, ist diese Anzahl auch gleich dem Koeffizient von $X^{k(p-1)}$ im Polynom $F_{2k}$. Um diesen Koeffizienten am einfachsten zu bestimmen, schreibt man

$$F_{2k} = (1 - X^p)^{2k}(1 - X)^{-2k}$$

und entwickelt. Es ergibt sich dann

$$(1 - X^p)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-X^p)^i \quad \text{und} \quad (1 - X)^{-2k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2k-1+i}{2k-1} X^i$$

mit einer für $|X| < 1$ konvergenten Potenzreihe.

Der uns interessierende Koeffizient ist dann

$$s(p, 2k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k}{i} \binom{(k-i)p + k - 1}{2k-1}.$$

Für $2k = 6$ ergibt sich $s(p, 6) = \frac{11p^5 + 5p^3 + 4p}{20}$, welcher für $p = 10$ den Wert 55 252 hat.