Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 70 (2015)
Heft: 1

Artikel: Harmonische Partitionen mit Nebenbedingungen
Autor: Spilker, Jürgen / Köhler, Günter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-630606

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 70 (2015) 7 – 12
0013-6018/15/010007-6
DOI 10.4171/EM/267

© Swiss Mathematical Society, 2015

Elemente der Mathematik

Harmonische Partitionen mit Nebenbedingungen

Günter Köhler und Jürgen Spilker

Beide Verfasser sind pensionierte Professoren für Mathematik in Würzburg beziehungsweise in Freiburg, und beide verbindet die Freude an Problemen und Ideen aus der elementaren Zahlentheorie und Analysis.

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir unsere in [2] begonnenen Untersuchungen über harmonische Partitionen etwas weiter führen. Wie dort erklären wir:

Definition. Eine natürliche Zahl n besitzt eine *harmonische Partition*, falls es natürliche Zahlen $t, a_1, a_2, \ldots, a_t$ gibt mit

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_t = n, \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_t} = 1. \tag{1}$$

Wir nennen dann (1) eine harmonische Partition von n und notieren diese als Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$. Wir dürfen und werden meistens annehmen, dass $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_t$ ist.

Eine Zerlegung $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ einer natürlichen Zahl n in positive ganze Summanden heisst Partition. Üblicherweise betrachtet man dabei Partitionen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Summanden. Partitionen spielen in der Kombinatorik und in der Zahlentheorie eine bedeutende Rolle. Die Anzahl $p(n)$ solcher Partitionen wächst schnell: Auf Hardy und Ramanujan geht die asymptotische Formel $p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}}$ zurück. Oftmals ist man jedoch nur an Partitionen mit zusätzlichen Eigenschaften interessiert. So betrachten die Autoren der vorliegenden Arbeit harmonische Partitionen, welche sich dadurch auszeichnen, dass die reziproken Summanden sich zu Eins aufaddieren: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_t} = 1$. Es ist bekannt, dass jedes $n \ge 24$ eine harmonische Partition besitzt. Die Autoren zeigen nun, dass man an die Summanden a_τ sogar noch weitere Bedingungen stellen kann: Man kann verlangen, dass sie groß oder paarweise verschieden sind oder nur kleine Primteiler haben. Die Beweise sind elementar.

Aus [2] übernehmen wir das folgende Resultat:

Basissatz 1. *Jede natürliche Zahl $n \geq 24$ besitzt eine harmonische Partition.*

Zusatz. *Die natürlichen Zahlen $n < 24$ mit harmonischen Partitionen sind* 1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 22. *Die größte natürliche Zahl ohne harmonische Partition ist* 23.

Programm. Für genügend große natürliche Zahlen suchen wir harmonische Partitionen, deren Summanden eine oder mehrere zusätzliche Bedingungen erfüllen, zum Beispiel:

(A) nur „kleine" Primteiler haben;

(B) paarweise verschieden sind;

(C) „groß" sind.

Wir werden Aussagen finden, die für alle natürlichen Zahlen mit jeweils endlich vielen Ausnahmen gelten. Wie schon der Basissatz zeigt, bestehen für kleine Zahlen stets Ausnahmen von den allgemeinen Gesetzmäßigkeiten. Wir wissen nicht, wie stark die Anzahl der harmonischen Partitionen von n mit n ansteigt; vermutlich ist aber das Wachstum stark genug, um „vernünftige" Zusatzbedingungen für genügend große n erfüllbar zu machen.

Bemerkung. Die meisten unserer Beweise sind Induktionsschlüsse, worin der Induktionsanfang darin besteht, für jede einzelne Zahl in einem mehr oder weniger langen Anfangsabschnitt eine Partition mit den gewünschten Eigenschaften nachzuweisen. Diese speziellen Partitionen stehen in drei Tabellen, die in der vorliegenden Version unserer Arbeit nicht abgedruckt sind. Interessenten erhalten die Tabellen auf (e-mail-)Anfrage von den Autoren, oder sie können die Tabellen im Internet unter

`http://www.math.ethz.ch/elemente/Koehler_Spilker_2014.pdf`

finden.

2 Kleine Primteiler

Für endlich viele paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ setzen wir

$$P(p_1, p_2, \ldots, p_r) = \left\{ p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \;\middle|\; e_1, e_2, \ldots, e_r \in \mathbb{N}_0 \right\}. \tag{2}$$

Das ist die Menge der natürlichen Zahlen, die keine anderen als die gegebenen endlich vielen Primteiler besitzen.

Satz 2. *Jede natürliche Zahl $n \geq 26$ besitzt eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit*

$$a_\tau \in P(2,3) \quad \textit{für alle} \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{3}$$

Zusatz. *Die natürlichen Zahlen $n < 26$, die harmonische Partitionen mit der Eigenschaft* (3) *besitzen, sind*

$$1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 22, 24.$$

Die Zahl 25 *ist die einzige, die eine harmonische Partition besitzt, aber keine mit der Eigenschaft* (3).

Beweis. Für natürliche Zahlen k betrachten wir die abgeschlossenen Intervalle

$$I_k = \left[4^{k-1} \cdot 26\,,\ 4^k \cdot 26\right],$$

und wir schließen ähnlich wie in [2] induktiv über k. In Tabelle 1 geben wir für jede natürliche Zahl n mit $26 \leq n \leq 104$ eine harmonische Partition mit der Eigenschaft (3) an. Somit gilt die Behauptung für $k = 1$. (Zu den Tabellen verweisen wir auf die Bemerkung am Ende von Abschnitt 1.)

Für ein $k \geq 1$ sei die Aussage richtig, und es sei ein $n \in I_{k+1}$ gegeben. Zunächst sei $n = 2m$ gerade. Dann besteht eine Zerlegung $m = m_1 + m_2$ mit Zahlen $m_1, m_2 \in I_k$. Diese besitzen nach Induktionsvoraussetzung harmonische Partitionen $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ mit der Eigenschaft (3). Es folgt $n = \sum_\tau (2a_\tau) + \sum_\sigma (2b_\sigma)$ und $\sum_\tau \frac{1}{2a_\tau} + \sum_\sigma \frac{1}{2b_\sigma} = 1$. Damit ist eine harmonische Partition von n gefunden, die ebenfalls die Eigenschaft (3) hat.

Im nächsten Schritt nehmen wir $n \equiv 1 \bmod 4$ an. Dann ist $n = 9 + 2m$ mit einer geraden Zahl m, die in $I_k \cup I_{k+1}$ liegt. Somit besitzt m eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit der Eigenschaft (3); dies gilt nach Induktionsvoraussetzung im Falle $m \in I_k$ und auf Grund des zuerst diskutierten Falles, wenn $m \in I_{k+1}$ ist. Es folgt $n = 3+6+\sum_\tau (2a_\tau)$ und $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_\tau \frac{1}{2a_\tau} = 1$. Damit ist eine harmonische Partition von n gefunden, die ebenfalls die Eigenschaft (3) hat.

Schließlich sei $n \equiv 3 \bmod 4$. Dann ist $n = 27+2m$ mit einer Zahl m, die wiederum gerade ist und in $I_k \cup I_{k+1}$ liegt, also wie zuvor eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit der Eigenschaft (3) besitzt. Jetzt ergibt $n = 3+12+12+\sum_\tau (2a_\tau)$ und $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\sum_\tau \frac{1}{2a_\tau} = 1$ eine harmonische Partition von n mit der Eigenschaft (3). Damit ist der Induktionsschluss vollständig, und der Satz ist bewiesen.

Die Behauptung im Zusatz ergibt sich aus Tabelle 1 und der Beobachtung, dass (5, 5, 5, 5, 5) die einzige harmonische Partition von 25 ist. □

Bemerkung. Dieser Beweis zusammen mit Tabelle 1 beweist auch den Basissatz 1.

3 Verschiedene Summanden

Harmonische Partitionen mit der Eigenschaft (B), also mit lauter verschiedenen Summanden, wurden schon in [1], [2] behandelt. Wie in [2] nennen wir solche Partitionen *stark harmonisch*. In [2] wurde das folgende Ergebnis bewiesen:

Satz 3. *Jede natürliche Zahl $n \geq 78$ besitzt eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit der Eigenschaft*

$$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_t. \tag{4}$$

Zusatz. *Die natürlichen Zahlen $n < 78$, die stark harmonische Partitionen besitzen, sind* 1, 11, 24, 30, 31, 32, 37, 38, 43, 45, 50, 52 *bis* 55, 57, 59 *bis* 62, 64 *bis* 67, 69, 71, 73 *bis* 76. *Die größte natürliche Zahl ohne stark harmonische Partition ist* 77.

Wir fragen, ob man die beiden Restriktionen (3) und (4) an die Summanden gleichzeitig erfüllen kann. Das ist tatsächlich der Fall, wenn man vier anstelle von zwei Primteilern (wie in Satz 2) zulässt. Als Verschärfung von Satz 3 zeigen wir in Proposition 4 zunächst,

dass man für $n \geq 78$ mit Primteilern ≤ 11 auskommt, und anschließend in Satz 5, dass man für $n \geq 92$ auch auf den Primteiler 11 und für $n \geq 113$ sogar auch auf 7 verzichten kann.

Proposition 4. *Jedes natürliche $n \geq 78$ besitzt eine stark harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit der Eigenschaft*

$$a_\tau \in P(2, 3, 5, 7, 11) \quad \textit{für alle} \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{5}$$

Zusatz. *Die natürlichen Zahlen $n < 78$, die stark harmonische Partitionen mit der Eigenschaft (5) besitzen, sind dieselben wie im Zusatz zu Satz 3. Für alle diese Zahlen kommt man mit Summanden $a_\tau \in P(2, 3, 5, 7)$ aus.*

Beweis von Proposition 4. Für natürliche Zahlen k betrachten wir die abgeschlossenen Intervalle

$$I_k = \left[2^{k-1} \cdot 78\,,\ 2^k \cdot 78\right],$$

und wir schließen wieder induktiv über k. Für die Zahlen $n \in I_1 \cup I_2 = [78,\ 312]$ entnimmt man die Behauptung der Tabelle 2. Für ein $k \geq 2$ nehmen wir an, dass die Behauptung für alle $n \in I_1 \cup \cdots \cup I_k$ zutrifft. Es sei ein $n \in I_{k+1}$ gegeben.

Zunächst sei n gerade. Wegen $n \geq 312$ ist dann $n = 2m + 2$ mit einer natürlichen Zahl $m \in I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Diese besitzt nach Induktionsannahme eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit den Eigenschaften (4) und (5). Darin ist $a_\tau \neq 1$ für alle τ. Folglich ist $n = 2 + \sum_\tau (2a_\tau)$ eine harmonische Partition von n mit den Eigenschaften (4) und (5).

Nun sei $n \equiv 1 \bmod 4$. Wir schreiben $n = 4m + 13$ mit einer natürlichen Zahl m. Nach Tabelle 2 dürfen wir $n \geq 325$ annehmen, so dass $m \geq 78$ und somit $m \in I_1 \cup \cdots \cup I_k$ ist. Wie zuvor hat m somit eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit den Eigenschaften (4), (5) und $a_\tau \neq 1$ für alle τ. Folglich ist $n = 3 + 4 + 6 + \sum_\tau (4a_\tau)$ eine harmonische Partition von n mit den Eigenschaften (4) und (5).

Schließlich sei $n \equiv 3 \bmod 4$. Wir schreiben $n = 4m + 55$ mit einer natürlichen Zahl m. Nach Tabelle 2 dürfen wir $n \geq 367$ annehmen, so dass $m \geq 78$ und somit $m \in I_1 \cup \cdots \cup I_k$ ist. Aus einer harmonischen Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ von m mit den Eigenschaften (4) und (5) erhalten wir wie zuvor eine harmonische Partition $n = 4 + 5 + 6 + 10 + 30 + \sum_\tau (4a_\tau)$ von n mit den gleichen Eigenschaften. Damit ist die Proposition bewiesen. Die Aussagen im Zusatz entnimmt man der Tabelle 2. □

Satz 5. *Jede ganze Zahl $n \geq 92$ besitzt eine stark harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit Summanden*

$$a_\tau \in P(2, 3, 5, 7) \quad \textit{für alle} \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{6}$$

Die Zahl 91 ist die einzige, die eine stark harmonische Partition mit der Eigenschaft (5), aber keine mit der Eigenschaft (6) besitzt. Jede natürliche Zahl $n \geq 113$ besitzt eine stark harmonische Partition mit Summanden

$$a_\tau \in P(2, 3, 5) \quad \textit{für alle} \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{7}$$

Beweis. Für jede von 91 verschiedene natürliche Zahl im Intervall [78, 312] zeigt die Tabelle 2 je eine stark harmonische Partition mit der Eigenschaft (6). Die Zahl $m = 91$ ist wirklich eine Ausnahme, denn wie in [2] mitgeteilt wurde, besitzt diese nur eine einzige (die in Tabelle 2 gezeigte) stark harmonische Partition. Die Tabelle 2 zeigt

für die Zahlen im Intervall [78, 367] mit wenigen Ausnahmen stark harmonische Partitionen, deren Summanden alle zu $P(2,3,5)$ gehören. Die Ausnahmen sind die Zahlen $m = 80, 84, 92, 96, 112$. Der Induktionsbeweis von Proposition 4 liefert daher die Behauptungen, sofern man nur für diese Ausnahmewerte zu den Zahlen $n = 2m+2$, $4m+13$, $4m+55$ je eine stark harmonische Partition mit der Eigenschaft (7) angeben kann. Die Zahlen $2m+2$ und die beiden kleinsten Werte $n = 333$ und $n = 349$ für $4m+13$ sind in Tabelle 2 erfasst. Die acht übrigen sind

$$n = 377, 397, 461, 375, 391, 419, 439, 503.$$

Hierfür zeigen wir Beispiele in Tabelle 3. □

Problem. Kann man auch auf den Primteiler 5 verzichten, wenn man ein längeres Anfangsstück als Ausnahmen weglässt? Hierzu müsste man einen neuen Beweis für Proposition 4 finden, denn der dritte Schritt in unserem Induktionsbeweis versagt für dieses Ziel.

Wir wissen, dass die Zahlen 55, 61, 69, 80, 84, 91, 96 keine stark harmonischen Partitionen mit Summanden in $P(2,3,5)$ besitzen. Für die Zahl 112 können wir dies ebenfalls zeigen. Im Beweis wird verwendet, dass in einer harmonischen Partition $(a_1, \ldots, a_t)$ einer Zahl $n > 1$ für jede Primzahl p die höchste Potenz von p, die ein a_ν teilt, auch Teiler von a_μ für wenigstens ein $\mu \neq \nu$ ist. Denn anderenfalls wäre diese Potenz von p ein Teiler des Nenners von $\sum_\tau 1/a_\tau$, und die Partition wäre nicht harmonisch. Der Beweis ist lang und ermüdend mit zahlreichen Fallunterscheidungen.

4 Große Summanden

Die Bedingung (C) über große Summanden in harmonischen Partitionen ist in folgendem Sinne erfüllbar:

Satz 6. *Zu jeder Schranke $A \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ mit $a_\tau \geq A$ für alle τ besitzt.*

Beweis. Zu gegebenem $A \in \mathbb{N}$ wählen wir $n_0 = (A^2 + 2A + 24)A$. Es sei ein $n \geq n_0$ gegeben. Hierzu definieren wir die ganzen Zahlen a und m durch

$$0 \leq a < A, \qquad n \equiv a \bmod A,$$
$$mA = n - a - (a+1)A^2 - (a-1)A.$$

Es folgt

$$mA > n_0 - A - (A+1)A^2 - (A-1)A = n_0 - A^3 - 2A^2 = 24A,$$

also $m > 24$. Nach dem Basissatz 1 besitzt m also eine harmonische Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$. Wir zerlegen

$$\begin{aligned} n &= mA + a + (a+1)A^2 + (a-1)A \\ &= mA + A(A-a-1) + (A+1)a + A(A+1)a \end{aligned}$$

in die Summe $\sum_\tau (Aa_\tau)$ sowie $A - a - 1$ Summanden A, a Summanden $A + 1$ und a Summanden $A(A + 1)$. Die Reziprokensumme der Summanden ist

$$\sum_\tau \frac{1}{Aa_\tau} + (A - a - 1)\frac{1}{A} + a\left(\frac{1}{A+1} + \frac{1}{A(A+1)}\right) = 1.$$

Damit ist eine harmonische Partition von n mit lauter Summanden $\geq A$ gefunden. □

Ein stärkeres Resultat von Graham (Theorem 2 in [1]) besagt, dass man (B) und (C) zugleich erfüllen kann: Zu gegebenem A besitzen alle genügend großen natürlichen Zahlen stark harmonische Partitionen mit Summanden $\geq A$. Sein Beweis ist sehr kompliziert.

5 Offene Fragen

1. Gibt es einen „einfachen“ Beweis für den Satz von Graham über (B) und (C)?
2. Gibt es Resultate über (5) und (C) oder über (6) und (C)?
3. Kann man (5), (B) und (C) simultan erfüllen?
4. Hat jede genügend große natürliche Zahl eine stark harmonische Partition, deren Summanden nur die Primteiler 2 und 3 haben?
5. In [2], Seite 73 haben wir gezeigt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, die eine stark harmonische Partition mit lauter ungeraden Teilen besitzen. Die dort auftretenden Summanden haben nur die Primteiler 3, 5 und 7. Gilt dies sogar für alle genügend großen ungeraden n?

   Es ist klar, dass man dies nur für ungerade n erwarten kann. Es sei nämlich $n = \sum_{1\leq\tau\leq t} a_\tau$ eine harmonische Partition mit lauter ungeraden a_τ. Das Produkt A aller a_τ und alle Zahlen $b_\tau = \frac{A}{a_\tau}$ sind dann ungerade. Wegen $\sum_{1\leq\tau\leq t} b_\tau = A$ ist somit t ungerade, und folglich ist auch n ungerade.
6. Besitzt jedes genügend große n eine harmonischen Partition, deren Summanden in festen Restklassen nach einem gegebenen Modul liegen? Die vorangegangene Bemerkung zeigt, dass man den Modul und die Restklassen nicht völlig beliebig vorgeben kann oder dass man Kongruenzbedingungen an n stellen muss.

Literatur

[1] Graham, R.L.: A theorem on partitions. J. Aust. Math. Soc. **3** (1963), 435–441.

[2] Köhler, G. und Spilker, J.: Harmonische Partitionen: Partitionen mit gegebener Summe der Kehrwerte der Teile. Math. Semesterber. **60** (2013), 67–80.

Günter Köhler
Universität Würzburg, Mathematisches Institut
Emil-Fischer-Straße 40, D-97074 Würzburg
e-mail: koehler@mathematik.uni-wuerzburg.de

Jürgen Spilker
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Mathematisches Institut
Eckerstr. 1, D-79104 Freiburg
e-mail: juergen.spilker@t-online.de