Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 70 (2015)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 70 (2015) 82 – 85
0013-6018/15/020082-4
DOI 10.4171/EM/279

© Swiss Mathematical Society, 2015

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2015 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich (**neue Adresse**)

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1338: Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\begin{aligned}&8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\\&\quad\geq (a(b+c)+2bc)^2(b(c+a)+2ca)^2(c(a+b)+2ab)^2.\end{aligned}$$

Mihály Bencze, Bukarest, RO

Aufgabe 1339: Beweise die Produktdarstellung

$$(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = e\cdot\sqrt[2]{e^{1/3}}\cdot\sqrt[4]{e^{1/5}}\cdot\sqrt[8]{e^{1/7}}\cdot\sqrt[16]{e^{1/9}}\cdot\ldots$$

Horst Alzer, Waldbröl, D

Aufgabe 1340 (Die einfache dritte Aufgabe): Auf den Schenkeln eines Winkels ist je ein Punkt A beziehungsweise B ausgewählt. Jeder innere Punkt C der Transversale AB ist Büschelpunkt eines Transversalbüschels. Bestimme C so, dass AB in diesem Büschel die kleinste Länge hat.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2014

Aufgabe 1326. Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise, dass für alle nichtnegativen ganzzahligen k gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b(kc+a)}+\frac{b}{c(ka+b)}+\frac{c}{a(kb+c)}\right)\geq\frac{9}{k+1}.$$

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, SRB

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 10 Lesern sind Lösungen eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Georghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser bemerken, dass die Ganzzahligkeit von k unwesentlich ist und die Mehrzahl der Löser arbeitet mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Mit minimalem Aufwand kommt *Roland Wyss* zum Ziel.

Erweitern der vorgelegten Ungleichung mit $k+1$ und Teilen durch $3\cdot 3$ ergibt die zu beweisende Ungleichung

$$\left(\frac{(ka+b)+(kb+c)+(kc+a)}{3}\right)\cdot\left(\frac{\frac{a}{b(kc+a)}+\frac{b}{c(ka+b)}+\frac{c}{a(kb+c)}}{3}\right)\geq 1.$$

Unter Beachtung, dass für positive Zahlen x, y, z das arithmetische Mittel $\frac{x+y+z}{3}$ stets grösser oder gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{xyz}$ ist, hat man ausgehend von der linken Seite der (umgeformten) Ungleichung

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(ka+b)+(kb+c)+(kc+a)}{3}\right)\cdot\left(\frac{\frac{a}{b(kc+a)}+\frac{b}{c(ka+b)}+\frac{c}{a(kb+c)}}{3}\right)\\&\geq\sqrt[3]{(ka+b)(kb+c)(kc+a)}\cdot\sqrt[3]{\frac{abc}{b(kc+a)c(ka+b)a(kb+c)}}=1,\end{aligned}$$

womit die Ungleichung für nichtnegative k bewiesen ist.

Aufgabe 1327. Im allgemeinen Dreieck seien a, b, c die Seitenlängen, s der halbe Umfang, und R, r der Um- bzw. Inkreisradius, F die Fläche, $E=(2a^2-(b-c)^2)(2b^2-(c-a)^2)(2c^2-(a-b)^2)$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{4F}\sqrt{\frac{E}{2}}\leq R+2r$$

mit Gleichheit für das gleichschenklige Dreieck.

Peter Nüesch, Lausanne, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es wurden 5 Beiträge zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D) und Walther Janous (Innsbruck, A).

Die meisten Löser schreiben die Ungleichung mithilfe der Seitenlängen a, b, c und kommen so zu einer äquivalenten und offensichtlich richtigen Ungleichung. Wir folgen den Ausführungen von *Hans Brandstetter*.

Wir formen die Ungleichung um zu

$$2\left((R+2r)4F\right)^2 - E \geq 0$$

und setzen jetzt die folgenden bekannten Zusammenhänge ein

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4F} \\ r &= \frac{2F}{a+b+c} \\ F &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

und vereinfachen. Es entsteht (nach längerer Rechnung oder mit CAS)

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0,$$

was offensichtlich eine wahre Aussage ergibt. Gleichheit ergibt sich bei gleichschenkligen Dreiecken.

Aufgabe 1328 (Die einfache dritte Aufgabe). Adjungiert man zum Körper $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ (rechnen modulo 3) das Element $\sqrt{2}$, so erhält man den endlichen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3(\sqrt{2}) = GF(9)$, also ein Galois-Feld mit 9 Elementen.

Wie viele normierte quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{K}$ kann man aufzählen, und wie viele davon besitzen in $\mathbb{K}$ eine Lösung?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 10 Lesern sind Lösungen eingegangen: Gerhard Bachmaier (Graz, A), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Fritz Siegerist (Küsnacht, CH).

Einige Löser arbeiten mit der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen, andere mit der Zerlegung in Linearfaktoren. Wir folgen der Lösung von *Gerhard Bachmaier*, der mit der zweiten Methode arbeitet und das Resultat verallgemeinert.

Die Überlegungen gelten für alle endlichen Körper $\mathbb{K}$ mit r Elementen ($r \geq 2$ eine Primzahlpotenz). Man kann r^2 normierte quadratische Polynome $x^2 + px + q$ bilden, da beide Elemente p, q frei aus den r Elementen des Körpers gewählt werden können.

Polynome, die Lösungen im Körper haben, sind entweder von der Form

$$(x-\alpha)(x-\beta), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

oder von der Form

$$(x-\alpha)^2, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Es ist nicht möglich, dass nur eine Lösung in $\mathbb{K}$ und die andere nicht in $\mathbb{K}$ liegt, weil bei der Division des quadratischen Polynoms durch einen Faktor $(x-\alpha)$ ein linearer Faktor verbleibt, der notwendigerweise eine zweite Lösung im Körper $\mathbb{K}$ hat. Vom ersten Typ gibt es $r(r-1)/2$ Polynome, vom zweiten Typ r. Da

$$\frac{r(r-1)}{2} + r = \frac{r(r+1)}{2} < r^2, \quad \text{für } r \geq 2,$$

gibt es immer ein paar irreduzible Polynome. Für den Fall $r = 9$ gibt es daher 81 Polynome, von denen 45 im Körper zerlegbar sind.