Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 72 (2017)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 72 (2017) 83 – 86
0013-6018/17/020083-4
DOI 10.4171/EM/329

© Swiss Mathematical Society, 2017

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2017 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden; für die Aufgabe 1359A ist kein Termin gesetzt. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1362: Eine natürliche Zahl heisst k-frei ($k \geq 2$), wenn sie von keiner k-ten Potenz einer Primzahl geteilt wird. Man beweise, dass das Verhältnis von geraden zu ungeraden k-freien Zahlen asymptotisch $2^{k-1} - 1$ zu 2^{k-1} ist.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Aufgabe 1363: Bildet man bei einer nicht konstanten, geometrischen Folge der Länge $n \geq 3$ mit positiven Gliedern deren arithmetisches Mittel, das geometrische Mittel und das harmonische Mittel, so erhält man wieder eine geometrische Folge (mit drei Gliedern). Wie lässt sich deren Quotient aus demjenigen der gegebenen geometrischen Folge berechnen? Können die beiden erwähnten Quotienten auch gleich sein?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1364 (Die einfache dritte Aufgabe): Ein Kinderspielzeug aus Holz, eine stilisierte Schildkröte zum Ziehen oder Schieben, hat vier kugelförmige Räder mit Durchmesser $2r = 3$ cm, Achsenabstand $a = 3.4$ cm, Achsenlänge von Kugelmittelpunkt bis Kugelmittelpunkt $d = 3.8$ cm. Darauf liegt eine fünfte Kugel mit Durchmesser $2R = 4.5$ cm. Wenn nun ein Knabe die Schildkröte über den Tisch schiebt, dreht sich die obere Kugel rückwärts. Die grössere Schwester steht daneben und fragt sich: „Wenn nun mein Bruder die Kröte 28.27433 cm geschoben hat, wie viele Umdrehungen machte dabei die obere Kugel?“

Gerhard Wanner, Genève, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2016

Aufgabe 1350. Für $p > 3$ sei

$$f(x) = x^{p-2}(2 - x^p).$$

Man zeige, dass $0 \le f(x) \le 1$ gilt, wann immer $0 \le x \le \cos(\frac{\pi}{p-1})$ ist.

Raymond Mortini, Metz, F

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 8 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Während schnell klar ist, dass die Funktion $f(x)$ eine Maximalstelle besitzt für ein $x_0 < 1$ mit Funktionswert $f(x_0) > 1$ und bis dorthin monoton wachsend ist, bleibt die Schwierigkeit zu zeigen, dass $\cos(\frac{\pi}{p-1})$ links des ersten Arguments mit Funktionswert 1 ist. Am ausgeklügeltsten handhabt dies *Henri Carnal*, dessen Ausführungen wir folgen.

Man berechnet $f'(x) = 2x^{p-3}\big((p-2) - (p-1)x^p\big)$. Ist $u = \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1/p}$ der stationäre Punkt, so ist $f'(x) < 0$ für $x > u$ und wegen $u < 1$ folgt $f(u) > f(1) = 1$. Für $0 < x < u$ ist $f'(x) > 0$ und wegen $f(0) = 0$ gibt es ein einziges $0 < v < u$ mit $f(v) = 1$ und aus $2 - v^p < 2$ folgt $v^{p-2} > \frac{1}{2}$ und daraus $v > \frac{1}{2}$ (wegen $p - 2 > 1$).

Zu zeigen ist $c = \cos(\frac{\pi}{p-1}) \le v$. Dies ist leicht für $p \le 4$ (weil $c \le \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} < v$) und auch für $4 \le p \le 5$ (weil $c \le \cos(\pi/4) = \sqrt{1/2}$ und $p - 2 \ge 2 \Rightarrow c^{p-2} \le c^2 \le \frac{1}{2} < v^{p-2}$).

Von nun an sei $p \ge 5$. Aus $f(v) = 1$ folgt $1-v^2 = 1-v^2 f(v) = 1-2v^p+v^{2p} = (1-v^p)^2$ und weiter $\sqrt{1-v^2} = 1 - v^p$. Man setzt

$$v = \cos(t), \quad s = \sin(t) = \sqrt{1-v^2}$$

und hat $1 - s = v^p = \cos(t)^p = (1-s^2)^{p/2} = (1-s)^{p/2}(1+s)^{p/2}$. Daraus folgt $(1-s)^{1-p/2} = (1+s)^{p/2}$ und durch Logarithmieren

$$-\frac{\log(1-s)}{\log(1+s)} = \frac{p}{p-2} = 1 + \frac{2}{p-2}. \tag{1}$$

Aus $(1+s)(1-s+y) - (1+y) = s(y-s) \le 0$ für $0 \le y \le s$ folgt $\frac{1}{1-s+y} \ge \frac{1+s}{1+y}$ und daraus

$$-\log(1-s) = \int_0^s \frac{dy}{1-s+y} \ge (1+s)\int_0^s \frac{dy}{1+y} = (1+s)\log(1+s)$$

oder

$$-\frac{\log(1-s)}{\log(1+s)} \ge 1 + s. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt einerseits $s \le \frac{2}{p-2}$ und andererseits $t < \pi/4$, weil $s = \sin(t)$ und $s \le \frac{2}{p-2} \le \frac{2}{3} < \sin(\pi/4)$. Weil $t/\sin(t)$ monoton wächst, gilt für $t < \pi/4$, dass

$\frac{t}{\sin(t)} < \frac{\pi/4}{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ und daraus

$$t < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}s \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{p-2} < \frac{\pi}{p-1},$$

denn wegen $p \geq 5$ ist $\sqrt{2}(p-2) > p-1$. Somit ist $v = \cos(t) > \cos(\frac{\pi}{p-1})$ und die Behauptung ist gezeigt.

Bemerkung: *Peter Bundschuh* verschärft die Aussage auf $0 \leq f(x) \leq 1$, wenn $0 \leq x \leq x_p = \left(\frac{p-3}{p-1}\right)^{1/p}$ und $x_p > \cos(\frac{\pi}{p-1})$.

Aufgabe 1351. Für die natürlichen Zahlen n und k sei

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{kn-in}{k+2}.$$

Man werte die Summe $S(n,k)$ geschlossen aus.

Michael Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während eine rein technische Herleitung relativ aufwändig ist, vereinfacht sich das Problem, wenn man diese Summe als kombinatorische Aufgabe deuten kann. Auf diese Weise haben *Henri Carnal, Jany C. Binz* und *Hansruedi Widmer* die Aufgabe gelöst. Wir folgen den Ausführungen der letztgenannten Person.

Die $k \cdot n$ Karten eines Spieles seien auf k Stapel mit je n Karten verteilt. Auf wie viele Arten kann man $k+2$ Karten so auswählen, dass aus jedem Stapel mindestens eine dabei ist? Wir zählen diese $(k+2)$-Teilmengen auf zwei Arten.

Einerseits gibt es $\binom{kn}{k+2}$ viele Teilmengen mit $k+2$ Karten. Es sei A_l $(1 \leq l \leq k)$ die Menge der $(k+2)$-Teilmengen, die keine Karte aus dem Stapel l enthalten. Mit der Ein- und Ausschaltformel ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}| &= \binom{kn}{k+2} - |A_1 \cup \cdots \cup A_k| \\
&= \binom{kn}{k+2} - \sum_l |A_l| + \sum_{l_1<l_2} |A_{l_1} \cap A_{l_2}| - \sum_{l_1<l_2<l_3} |A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap A_{l_3}| + \cdots \\
&= \binom{kn}{k+2} - \binom{k}{1}\binom{kn-n}{k+2} + \binom{k}{2}\binom{kn-2n}{k+2} - \binom{k}{3}\binom{kn-3n}{k+2} + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{kn-in}{k+2}.
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man eine $(k+2)$-Teilmenge der verlangten Art, wenn man entweder aus $k-2$ Stapeln je eine und aus zwei Stapeln je zwei Karten auswählt oder aus $k-1$ Stapeln je eine und aus einem Stapel drei Karten auswählt:

$$\binom{k}{k-2}n^{k-2}\binom{n}{2}^2+\binom{k}{k-1}n^{k-1}\binom{n}{3}=\frac{1}{24}k(n-1)n^k(3k(n-1)+n-5).$$

Somit ist

$$S(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{kn-in}{k+2}=\frac{1}{24}k(n-1)n^k(3k(n-1)+n-5).$$

Aufgabe 1352 (Die einfache dritte Aufgabe). Warum endet für jede Primzahl $p>5$ die Potenz p^{500} mit der Ziffernfolge 0001? Wie kann man diese Aussage verallgemeinern?

Burchard Kaup, Villars-sur-Glâne, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 17 Lesern sind Lösungen eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Yagub Aliyev (Khyrdalan, AZ), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Heinz Klement (Asperg, D), Joachim Klose (Bonn, D), Victor Pambuccian (Phoenix, USA), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Allen Lesern ist klar, dass für die Zahl p nur gefordert werden muss, dass sie weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Wir folgen den Ausführungen von *Jürgen Spilker*, der wie die meisten Leser auf höhere Potenzen von 10 verallgemeinert.

Sei p eine ungerade Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist. Für $k\geq 1$ gilt die Zerlegung

$$p^{2^k}-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)\cdots(p^{2^{k-1}}+1).$$

Alle $k+1$ Faktoren des Produkts rechts sind gerade und einer der ersten beiden ist durch 4 teilbar, deshalb ist $p^{2^k}-1\equiv 0 \mod 2^{k+2}$ und daraus

$$p^{2^k}\equiv 1 \mod 2^{k+2}. \tag{1}$$

Wegen $\varphi(5^{k+2})=5^{k+2}-5^{k+1}=2^2\cdot 5^{k+1}$ folgt aus dem kleinen Fermat-Satz

$$p^{2^2\cdot 5^{k+1}}\equiv 1 \mod 5^{k+2}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich für $k\geq 2$

$$p^{5\cdot 10^k}\equiv 1 \mod 10^{k+2}.$$

Das heisst, dass die Dezimalzahl $p^{5\cdot 10^k}$ mit der Ziffernfolge $\underbrace{00\ldots0}_{k+1}1$ endet.