Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 72 (2017)
Heft: 3

Artikel: Papagenos Wunsch und die Mathematik
Autor: Knolle, Helmut
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-730839

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 72 (2017) 122 – 125
0013-6018/17/030122-4
DOI 10.4171/EM/334

© Swiss Mathematical Society, 2017

Elemente der Mathematik

Papagenos Wunsch und die Mathematik

Helmut Knolle

Helmut Knolle, geb. 1939, studierte Mathematik und Philosophie in Frankfurt am Main und erwarb das Diplom in Mathematik. Nach einigen Jahren Tätigkeit in der Industrie kehrte er in das akademische Leben zurück und promovierte bei Klaus Deimling. In den 1980er Jahren arbeitete er in einem Projekt der Krebsforschung an der Medizinischen Hochschule Hannover. 1989 kam er in die Schweiz und schätzte im Auftrag des Bundesamtes für Gesundheit die Zahl der HIV-Positiven und der Drogenkonsumierenden in der Schweiz im Zeitverlauf.

Ein Mädchen oder Weibchen wünscht Papageno sich, singt einer der Protagonisten in Mozarts Oper „Die Zauberflöte". Dieser Wunsch findet heute für viele Männer in der Volksrepublik China keine Erfüllung. Als Grund wird fast immer die wegen der Ein-Kind-Politik der Regierung weit verbreitete Praxis, weibliche Embryonen abzutreiben, angeführt. In Europa war es im 19. Jahrhundert umgekehrt: viele Frauen konnten nicht heiraten, weil es zu wenig Männer gab.[1] Mit der höheren Sterblichkeit der Männer in Kriegszeiten kann das nicht erklärt werden, denn zwischen 1871 und 1914 führten die meisten europäischen Staaten keine Kriege. Im Folgenden wird ein mathematisches Modell vorgestellt, das beide Phänomene aus der Tatsache erklärt, dass Frauen gewöhnlich früher heiraten als Männer. Je nachdem ob die Bevölkerung wächst oder schrumpft, hat der Unterschied im Heiratsalter eine Überzahl von Frauen oder von Männern auf dem Heiratsmarkt zur Folge.

[1] Englische Quellen aus jener Zeit beklagen die „ungeheure und wachsende Zahl alleinstehender Frauen in der Nation, eine Zahl, die in ihrer Disproportion und Anomalie anzeigt, dass die Gesellschaft krank ist", vgl. [1].

Wie muss eine geschlossene Bevölkerung beschaffen sein, damit der Heiratsmarkt für heterosexuelle Männer und Frauen im Gleichgewicht ist? Weit verbreitet ist die Meinung, dass es nur auf die geschlechtsspezifischen Geburtenraten und Sterblichkeiten ankäme. Aber selbst wenn diese exakt gleich sind, kann es zu einer Überzahl von heiratswilligen Frauen (Männern) kommen, nämlich dann, wenn die Frauen früher heiraten als die Männer und wenn die Bevölkerung wächst (schrumpft). Dieses Phänomen wird hier mit einem einfachen Modell, bestehend aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen, zwei davon mit time delay, bewiesen. Das Ergebnis wird bestätigt durch demographische Daten aus dem 19. Jahrhundert und aus dem Demographischen Jahrbuch der UNO von 1990.

In den einfachsten demographischen Modellen hängt die Zahl der Geburten nur von der Zahl der Frauen im gebärfähigen Alter ab. Pollard hat hingegen ein Modell mit Frauen, Männern und heterosexuellen Paaren untersucht, in dem die Zahl der Geburten von der Zahl der Paare abhängt [2]. Dieses Modell, das aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht, wurde später verallgemeinert zu einem Modell mit drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den unabhängigen Variablen Zeit und Alter. Zwar konnte die Existenz einer exponentiell wachsenden Lösung bewiesen werden [3], aber spezifische Fragen können mit diesem Modell kaum beantwortet werden. Um die Differenz im Heiratsalter darzustellen und ihren Einfluss auf den Heiratsmarkt zu bestimmen, ist jedoch der Übergang zu partiellen Differentialgleichungen nicht zwingend notwendig, wie das folgende Modell zeigt.

In dem Modell treten wie bei Pollard [2] die folgenden Variablen und Parameter auf:

$x(t)$ Zahl der ledigen, heiratsfähigen Frauen zur Zeit t,

$y(t)$ Zahl der ledigen, heiratsfähigen Männer zur Zeit t,

$p(t)$ Zahl der Paare zur Zeit t,

μ_x Sterberate der Frauen,

μ_y Sterberate der Männer,

σ Scheidungsrate.

Als ledig werden hier auch die verwitweten und geschiedenen Personen bezeichnet. Sterberaten und Scheidungsrate werden als alters- und zeitunabhängig angenommen. Weiter braucht man die Paarbildungsfunktion ϕ, die die Rate der Paarbildung in Abhängigkeit von x und y beschreibt. Die Eigenschaften dieser Funktion spielen in den folgenden Rechnungen keine Rolle. Da ein Paar sich durch Tod eines Partners oder durch Scheidung auflösen kann, haben wir für die Paare die folgende Gleichung:

$$\frac{dp}{dt} = \phi(x, y) - (\mu_x + \mu_y + \sigma)p(t).$$

Die Gleichungen für x und y müssen neben den Geburtenraten auch die Kindersterblichkeit und das Alter, in dem Frauen und Männer heiratsfähig werden, berücksichtigen. Sei also

d_x untere Grenze des Heiratsalters der Frauen,

d_y untere Grenze des Heiratsalters der Männer,

λ_x Geburtenrate der Mädchen multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, das Alter d_x zu erreichen,

λ_y Geburtenrate der Knaben multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, das Alter d_y zu erreichen.

Die Gleichungen für ledige Frauen und Männer lauten nun:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x p(t - d_x) - \mu_x x - \phi(x, y) + (\mu_y + \sigma)p(t),$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda_y p(t - d_y) - \mu_y y - \phi(x, y) + (\mu_x + \sigma)p(t).$$

Die Ergebnisse von Pollard [2] und Martcheva [3] sprechen dafür, dass das obige System eine Lösung mit konstanten Verhältnissen $x : y : p$ und exponentiellem Wachstum hat. Wenn man

$$x(t) = x_0 \exp(\rho t), \quad y(t) = y_0 \exp(\rho t), \quad p(t) = p_0 \exp(\rho t)$$

in die Gleichungen einsetzt, dann folgt nach einfacher Rechnung:

$$(\rho + \mu_x)(x + p) = \lambda_x \exp(-\rho d_x) p,$$
$$(\rho + \mu_y)(y + p) = \lambda_y \exp(-\rho d_y) p,$$

und weiter:

$$\frac{x + p}{y + p} = \frac{\lambda_x(\rho + \mu_y)}{\lambda_y(\rho + \mu_x)} \exp[\rho(d_y - d_x)].$$

Da wir zeigen wollen, dass ein Ungleichgewicht auf dem Heiratsmarkt auch ohne Unterschiede in den Geburten- und Sterberaten entstehen kann, setzen wir jetzt $\lambda_x = \lambda_y$ und $\mu_x = \mu_y$. Dann erhalten wir

$$\frac{x + p}{y + p} = \exp[\rho(d_y - d_x)],$$

und, in erster Näherung:

$$\frac{x - y}{y + p} = \rho(d_y - d_x).$$

Es gibt also, sofern $d_y > d_x$ ist, immer dann einen Frauenüberschuss auf dem Heiratsmarkt, wenn die Bevölkerung exponentiell wächst, und einen Männerüberschuss, wenn sie expontiell schrumpft.

Die Frage drängt sich auf, ob diese Aussage durch empirische Daten bestätigt wird. Für die Zeit vor 1945 gibt es kaum geeignete Daten. Eine Ausnahme ist die Stadt Bologna. Ein italienischer Demograph hat drei Generationen von Männern und Frauen untersucht, deren Eltern, Großeltern oder Urgroßeltern im Jahr 1871 in Bologna geheiratet haben [4]. Er fand, dass der Prozentsatz der mit 50 Jahren noch ledigen Personen in der ersten und zweiten Generation bei den Frauen viel höher lag als bei den Männern (Tabelle 1). Dieser Unterschied hat sich erst in der dritten Generation, die in den 1940er und 1950er Jahren heiratsfähig wurde, sehr stark abgeschwächt.

	1. Generation	**2. Generation**	**3. Generation**
Männer	16,7	13,8	8,1
Frauen	27,3	25,2	9,5

Tabelle 1 Anteil (in %) der mit 50 Jahren noch ledigen Personen unter den Nachkommen von 532 Ehepaaren, die im Jahr 1871 in Bologna geheiratet haben.

Heute bieten die Demographischen Jahrbücher der Vereinten Nationen umfangreiches Datenmaterial aus fast allen Ländern der Erde. Daten, die sich auf das Heiratsverhalten beziehen, wurden zum letzten Mal in der Ausgabe für das Jahr 1990 publiziert. Diese dient hier als Quelle [5].

Tabelle 2 zeigt die Zahl der geschiedenen Frauen und Männer im Alter von 35 bis 39 in zwei Ländern mit schnell wachsender und zwei Ländern mit langsam wachsender Bevölkerung im Jahr 1988. In Bolivien gab es mehr als dreimal und in Guatemala mehr als viermal so viel geschiedene Frauen wie Männer, während der Quotient in der Schweiz nur 1,4 und in der Tschechoslowakei nicht einmal 1,2 betrug. Dieser Sachverhalt kann nicht darauf zurückgeführt werden, dass die Frauen bei der Scheidung jünger sind, weil sie früher heiraten. Denn weil sie früher geschieden sind, könnten sie auch früher die zweite Ehe eingehen, was sie in Europa ja auch tun.

	Bolivien	**Guatemala**	**Schweiz**	**CSSR**
Frauen	11 300	16 475	22 067	59 580
Männer	3 700	3 958	15 425	51 583
Quotient	3,1	4,2	1,4	1,16
Wachstumsrate(%)	2,4	2,6	0,4	0,2

Tabelle 2 Zahl der geschiedenen und getrennten Personen im Alter von 35 bis 39 Jahren (1988) in Ländern mit unterschiedlicher Wachstumsrate der Bevölkerung.

Literatur

[1] Dauphin, Cécile, *La donna solitaria*. In: Duby, Georges e Perrot, Michelle. *Storia delle donne in occidente*, vol. 4, Roma 1991

[2] Pollard, J.H.; *Mathematical models for the growth of human populations*. Cambridge University Press 1973

[3] Martcheva, M.; *Exponential growth in age-structured two-sex populations*. Mathematical Biosciences 157 (1999), 1–22

[4] J. Dupaquier, E. Hélin, P. Laslett, M. Livi-Bacci, S. Sogner (eds.); *Marriage and Remarriage in Populations of the Past*. Academic Press 1981

[5] United Nations, *Demographic Yearbook* 1990, New York 1992, Table 41

Helmut Knolle
Oberwohlenstr. 20
CH-3033 Wohlen b. Bern
e-mail: `helmut.knolle@bluewin.ch`