Short note : on the sums of Fibonacci and Lucas sequences or the art of cancelling 1-x

Autor(en): **Pauni, Dura**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **72 (2017)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-730843

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 72 (2017) 171 – 172
0013-6018/17/040171-2
DOI 10.4171/EM/340

© Swiss Mathematical Society, 2017

Elemente der Mathematik

Short note

On the sums of Fibonacci and Lucas sequences or the art of cancelling $1 - x$

Đura Paunić

Let $\{F_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$, and $\{L_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots\}$, be sequences of Fibonacci, and Lucas numbers. Their generating functions are

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n, \quad \text{and} \quad L(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n.$$

Recently, Sury [3], and Marques [2] established the Fibonacci–Lucas relations

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k L_k = 2^{n+1} F_{n+1}, \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{n} 3^k L_k + \sum_{k=0}^{n+1} 3^{k-1} F_k = 3^{n+1} F_{n+1}.$$

The first identity was elegantly proved by Kwong [1].

These two identities can be generalized easily using generating functions.

Let $G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_n x^n + \cdots$, be any generating function. It follows that the coefficient of x^n is

a) $m^n g_n$, for $G(mx)$, b) g_{n-1} for $xG(x)$, $n > 0$,

c) g_{n+1} for $\dfrac{G(x)}{x}$, $n \geqslant 0$, d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k$, for $\dfrac{G(x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j \times \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Then for $m > 0$, $\sum_{k=0}^{n} m^k L_k + (m-2) \sum_{k=0}^{n+1} m^{k-1} F_k$, is the coefficient of x^n in

$$\begin{aligned}
&\frac{L(mx)}{1-x} + \frac{(m-2)F(mx)}{mx(1-x)} \\
&\quad = \frac{2 - mx}{(1-x)(1-(mx)-(mx)^2)} + \frac{(m-2)mx}{mx(1-x)(1-(mx)-(mx)^2)} \\
&\quad = \frac{m}{1-(mx)-(mx)^2} = \frac{F(mx)}{x}.
\end{aligned}$$

So, for nonnegative integer n, and real $m > 0$, the identity

$$\sum_{k=0}^{n} m^k L_k + (m-2)\sum_{k=0}^{n+1} m^{k-1} F_k = m^{n+1} F_{n+1}$$

holds.

References

[1] H. Kwong, An alternate proof of Sury's Fibonacci–Lucas relation, *Amer. Math. Monthly*, 121 (2014), 514.

[2] D. Marques, A new Fibonacci-Lucas relation, *Amer. Math. Monthly*, 122 (2015), 683.

[3] B. Sury, A polynomial parent to a Fibonacci–Lucas relation, *Amer. Math. Monthly*, 121 (2014), 236.

Đura Paunić
Department of Mathematics and Informatics
Faculty of Sciences
University of Novi Sad
Trg Dositeja Obradovića 4
21000 Novi Sad, Serbia
e-mail: `djura@dmi.uns.ac.rs`