Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 73 (2018)
Heft: 3

Artikel: Eine Dobiski-Reihe für die Anzahl surjektiver Abbildungen
Autor: Schreiber, Alfred
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-780943

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 73 (2018) 130 – 132
0013-6018/18/030130-3
DOI 10.4171/EM/362

© Swiss Mathematical Society, 2018

Elemente der Mathematik

Short note

Eine Dobiński-Reihe für die Anzahl surjektiver Abbildungen

Alfred Schreiber

Auf Dobiński [3] geht die berühmte Darstellung der Bell-Zahlen $B(r)$ in Form einer unendlichen Reihe zurück:

$$B(r) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^r}{k!}. \tag{1}$$

Der Formel (1) soll in diesem Beitrag ein Analogon zur Seite gestellt werden, das die Anzahl der surjektiven Abbildungen (mit r-elementiger Definitionsmenge) ebenfalls als unendliche Reihe darstellt.

Zu ganzem $r \geq 1$ bezeichnet die Bell-Zahl $B(r)$ die Anzahl möglicher Zerlegungen (Partitionen) einer Menge R von r Elementen in paarweise disjunkte (nichtleere) Teilmengen. Sortieren wir die Partitionen nach der Anzahl j der sie bildenden Teilmengen ($1 \leq j \leq r$), so können wir schreiben:

$$B(r) = \sum_{j=1}^{r} \left\{ {r \atop j} \right\}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\left\{ {r \atop j} \right\}$ eine Stirling-Zahl zweiter Art; sie gibt an, auf wie viele Weisen sich Zerlegungen von R herstellen lassen, die aus j Teilmengen bestehen (j-Partitionen).

Sei $f : R \to \{1, \ldots, j\}$ eine surjektive Abbildung. Dann bilden die Urbildmengen $f^{-1}[\{i\}]$ mit $1 \leq i \leq j$ eine j-Partition von R. Offensichtlich erhalten wir sämtliche Surjektionen vom Typ $R \to \{1, \ldots, j\}$, indem wir jede j-Partition von R mit den möglichen Anordnungen der Bildmenge $\{1, \ldots, j\}$ paaren. Damit ergeben sich $j!\left\{ {r \atop j} \right\}$ Surjektionen einer r-elementigen Menge auf eine j-elementige Menge.

In Entsprechung zu (2) bilden wir die totale Surjektionszahl $S(r)$ als Anzahl der surjektiven Abbildungen, deren Definitionsmenge aus r Elementen besteht:

$$S(r) := \sum_{j=1}^{r} j! \left\{ {r \atop j} \right\}. \tag{3}$$

Alternativ kann $S(r)$ aufgefasst werden als Anzahl aller Partitionen einer r-elementigen Menge, worin die Teilmengen eine geordnete Folge bilden; sie erzeugen so eine schwache Ordnung der Elemente (wie sie etwa beim Pferderennen entsteht, wo jeweils alle Pferde, die zeitgleich die Ziellinie erreichen, einer Teilmenge zugerechnet werden).

Auch für diesen Zählausdruck lässt sich eine der Dobiński-Reihe (1) ähnliche Reihendarstellung finden:

Satz.

$$S(r) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^r}{2^k}. \tag{4}$$

Dem Beweis des Satzes werde zunächst eine einfache kombinatorische Betrachtung vorausgeschickt.

Beiden Reihen (1) und (4) gemeinsam ist der im Summanden auftretende Zähler k^r; er lässt sich auffassen als Anzahl aller Abbildungen von R in eine Menge K von k Elementen ($k \geq 1$ ganz). Es gilt hier die bekannte und für die Stirling-Zahlen zweiter Art charakteristische Identität:

$$k^r = \sum_{j=1}^{r} \left\{ {r \atop j} \right\} k(k-1)\cdots(k-j+1). \tag{5}$$

(5) ist kombinatorisch interpretierbar. Wir bilden dazu eine j-Partition $\{C_1, \ldots, C_j\}$ von R ($1 \leq j \leq r$), was auf $\left\{ {r \atop j} \right\}$ Weisen geschehen kann. Nun werde ein $a_1 \in K$ gewählt und sämtlichen Elementen aus C_1 als Bild zugeordnet; sodann werde $a_2 \in K \setminus \{a_1\}$ gewählt und sämtlichen Elementen aus C_2 als Bild zugeordnet, usw. Für j Elemente $a_1, \ldots, a_j$ gibt es somit $k(k-1)\cdots(k-j+1) =: (k)_j$ Auswahlmöglichkeiten. – Es ist klar, dass sich umgekehrt auf diese Weise *jede* Abbildung $R \to K$ beschreiben lässt.

Aus (5) ergibt sich unmittelbar, dass eine Summe gewichteter r-ter Potenzen $\gamma_1 + \gamma_2 2^r + \cdots + \gamma_n n^r$ wie folgt umgewandelt werden kann:

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k k^r = \sum_{j=1}^{r} \left\{ {r \atop j} \right\} \cdot \underbrace{\sum_{k=j}^{n} \gamma_k \cdot (k)_j}_{(*)}. \tag{6}$$

In [5] wird diese Beziehung für unterschiedliche Belegungen der γ_k ausgewertet. Wählen wir etwa $\gamma_k = 1/k!$, so erhalten wir für die unterklammerte Summe:

$$(*) = \sum_{k=j}^{n} \frac{(k)_j}{k!} = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{(k-j)!} \longrightarrow \mathrm{e} \quad \text{für } n \to \infty,$$

was mit (6) unmittelbar die Dobiński-Reihe (1) liefert.

Abschließend führen wir nach dieser einfachen Methode den noch ausstehenden

Beweis des Satzes. Wir wählen $\gamma_k = x^k$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Zunächst wird wieder die unterklammerte Summe in (6) ausgewertet:

$$(*) = \sum_{k=j}^{n} (k)_j x^k = j! \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} x^k = j!\, x^j \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{k-j} x^{k-j}$$

$$= j!\, x^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j+k}{k} x^k \longrightarrow j!\, x^j \cdot \frac{1}{(1-x)^{j+1}} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Mit (6) ergibt sich hieraus die für $|x| < 1$ konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r x^k = \frac{1}{1-x} \sum_{j=1}^{r} j! \left\{ {r \atop j} \right\} \left(\frac{x}{1-x} \right)^j.$$

Spezialisieren wir hier $x = \frac{1}{2}$, so resultiert unter Berücksichtigung von (3) die behauptete Reihendarstellung (4).

Die Reihe (4) ist nicht neu; sie wurde bereits von Gross [4] mit analytischen Methoden gefunden. Dasef und Kautz [2] haben gezeigt, dass die Ausdrücke (4) und (3) diesselbe rekurrente Gleichung erfüllen und daher übereinstimmen. Auf Comtet [1], S. 238, geht die Bezeichnung 'Fubini-Zahlen' für die $S(r)$ zurück, sofern bei r-facher Integration sich die Einzelintegrale in Fubinis Theorem auf $S(r)$ Weisen angeordnet gruppieren lassen. In [1] findet man auch eine mit (4) verwandte Reihenentwicklung unter Verwendung von Euler-Zahlen.

Literatur

[1] Comtet, L.: *Advanced Combinatorics.* Revised and enlarged edition, Reidel Publ. Co.: Dordrecht 1974.

[2] Dasef, M.E.; Kautz, S.M.: Some sums of some significance. *College Math. J.* 28 (1997), 52–55.

[3] Dobiński, G.: Summierung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ *Grunert's Archiv* 61 (1877), 333–336.

[4] Gross, O.A.: Preferential arrangements. *Amer. Math. Monthly* 69 (1962), 4–8.

[5] Schreiber, A.: Gewichtete Potenzsummen und Stirling-Zahlen. In (Ders.): *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*, Logos Verlag: Berlin 2014, 248–255.

Alfred Schreiber
Europa-Universität Flensburg