Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1899)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NOTATION DIFFÉRENTIELLE ET L'ENSEIGNEMENT
Autor: Poincaré, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1222

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA NOTATION DIFFÉRENTIELLE

ET L'ENSEIGNEMENT

Dans un article très intéressant de M. H. Laurent [1] sur les mathématiques spéciales en France, je lis la phrase suivante. « Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées ; c'est aux gens compétents que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle. »

Je ne dirai pas que j'ai lu cette phrase avec étonnement ; car elle exprime une opinion assez répandue ; mais, en ce qui me concerne, je conteste absolument les avantages de la notation différentielle et je crois qu'on ne doit l'enseigner aux débutants que quand ils sont déjà familiarisés avec la notation des dérivées.

La notation de Leibniz, dit M. Laurent, est plus commode que celle de Lagrange. Pourquoi plus commode ? J'en cherche les raisons et je n'en trouve que deux :

1° Si on emploie les accents pour représenter les dérivées, on sera privé de cette ressource pour distinguer les unes des autres des quantités analogues, mais différentes ; on ne pourra plus dire, par exemple : soient x, y, z, et x', y', z', deux points dans l'espace ;

2° Pour faire connaître la variable par rapport à laquelle on différentie, il faut affecter les lettres d'indices qui peuvent devenir gênants pour le typographe si la lettre porte déjà d'autres indices pour une autre cause.

Ce sont là des inconvénients tout matériels, tout extérieurs et qui peuvent être compensés par des avantages de même ordre, tel que le suivant :

---

[1] Voir *l'Enseignement mathématique*, n° 1, p. 38.

Je veux représenter la valeur que prend la dérivée de $f'(x)$ pour $x = 0$; je n'ai aucun moyen de le faire avec la notation de Leibniz ; avec celle de Lagrange je n'ai qu'à écrire $f'(0)$.

Mais, dira-t-on, c'est là prendre la question par le petit côté. Que sont ces considérations purement matérielles auprès de la haute portée philosophique d'une notation qui rappelle à chaque instant la définition, le sens profond des quantités que l'on a à manier ?

Hélas, elle ne les rappelle que trop, et il vaudrait mieux les rappeler moins que de les rappeler imparfaitement. Neuf fois sur dix, on n'évitera les erreurs qu'en tâchant d'oublier la signification primitive de ces symboles ; c'est ce que je vais montrer bientôt.

Quant à moi, j'emploie d'ordinaire la notation différentielle, d'abord parce que c'est la langue que parlent la plupart de mes contemporains et ensuite à cause des petites raisons matérielles que j'ai exposées plus haut. Mais si j'écris en différentielles, le plus souvent je pense en dérivées.

J'ai dit que la notation différentielle est imparfaite et nous expose à l'erreur ; c'est ce qu'il me reste à démontrer.

Tout va bien quand on se borne aux différentielles du premier ordre et quand il n'y a qu'une variable indépendante. Oh alors, j'approuve sans réserve tout ce qu'on peut dire au sujet de la portée philosophique du symbole leibnizien et de ses avantages.

Mais, dès que l'on passe aux dérivées du second ordre, on nage dans l'absurdité ; soit z une fonction d'une variable y qui est elle-même fonction de x ; j'écris :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\,\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dans cette formule j'écris deux fois d^2z, et ce symbole a deux significations différentes. Dans le second membre, il signifie que si je donne à y deux accroissements successifs *égaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2z$. Dans le premier, il signifie que si je donne à x deux accroissements successifs égaux, d'où résultent pour y deux accroissements successifs *inégaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2z$.

La difficulté s'aggrave si on a plusieurs variables indépendantes; j'écris :

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy.$$

Là encore nous avons trois fois le symbole dz avec trois significations différentes. La première fois dz représente l'accroissement subi par z quand x et y se changent en $x + dx$ et $y + dy$; la seconde fois l'accroissement de z quand x et y se changent en $x + dx$ et y; la troisième fois l'accroissement de z quand x et y se changent en x et $y + dy$.

Que de pièges à éviter! Aussi les débutants ne les évitent-ils pas. J'ai vu un élève intelligent et déjà avancé exposer comme il suit la théorie de la vitesse du son, en masquant seulement par quelques artifices ce que sa démonstration avait de choquant.

Nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2z}{dx^2};$$

je divise par d^2z et je multiplie par dx^2; j'ai

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2,$$

d'où :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a,$$

ce qui prouve que le son peut se propager dans les deux sens avec la vitesse a.

« C'est singulier, répondait l'examinateur, excellent physicien que je ne veux pas nommer; votre démonstration est bien plus simple que toutes celles que je connaissais » ; et il lui donna la note 19.

Si je voulais être méchant, il ne serait pas difficile de trouver des erreurs analogues dans des livres imprimés.

L'emploi des ∂ ronds est un palliatif insuffisant. Ce n'est pas deux formes de d qu'il faudrait, il en faudrait cinq, il en faudrait dix.

Pourquoi en somme est-on plus choqué de ces anomalies, pourquoi engendrent-elles relativement plus d'erreurs? C'est parce qu'on oublie l'origine de ces notations, qu'on ne considère

pas $\frac{d^2z}{dx^2}$ comme le quotient de deux quantités d^2z et dx^2 envisagées séparément, mais qu'on regarde au contraire cette fraction comme un *bloc*, comme la dérivée seconde de z par rapport à x. C'est en un mot *parce qu'on pense en dérivées.*

Il faut donc apprendre à penser en dérivées ; quand on aura pris cette habitude on pourra sans danger se servir de la notation leibnizienne. Il est clair que le meilleur moyen de donner cette habitude aux élèves, c'est de leur enseigner d'abord la notation de Lagrange. Quand ils seront familiarisés avec ce langage, quand ils s'en seront servis dans de nombreux exercices, quand ils sauront faire un changement de variables, on pourra sans inconvénient leur parler de la notation de Leibniz. Jusque-là on doit s'en abstenir, ou tout au moins se borner *aux différentielles du premier ordre et seulement dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante.*

Si au contraire dès le début on veut leur apprendre à faire des changements de variables avec la notation de Leibniz, ils ne sauront jamais les faire correctement.

Je ne veux pas dire qu'il ne faut pas, *plus tard*, leur enseigner la notation différentielle ; il faut qu'ils puissent manier ce langage qui est usité par tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand, bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas de sens commun, parce qu'elle est parlée par soixante millions d'hommes dont beaucoup sont des savants.

Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent, et où l'on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on n'envisage que des différentielles du premier ordre et avec une seule variable indépendante. Il peut être utile de se familiariser de bonne heure avec cette notion, d'apprendre ainsi à raisonner correctement sur les infiniment petits. On comprendra ainsi facilement la théorie des petites erreurs, si importante pour la pratique.

En résumé, en mathématiques spéciales, on doit employer presque exclusivement la notation de Lagrange ; on fera connaître aux élèves les différentielles premières, en insistant surtout sur le cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Si on aborde

le cas où il y en a plusieurs, on se servira exclusivement de la notation de Lagrange pour les dérivées partielles; on n'écrira jamais :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

mais

$$df = f'_y dx + f'_y dy.$$

On s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes.

A l'Ecole polytechnique et dans les Facultés, on enseignera la notation différentielle et on l'emploiera de préférence.

H. Poincaré (Paris).

L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

EN FRANCE

CONCOURS DE 1898 ET PROGRAMME DE 1899

Le concours d'agrégation des sciences mathématiques en France est de la plus haute importance. Il décide de la carrière des professeurs, et ceux qui ne parviennent pas à obtenir le titre d'agrégé se voient condamnés à tout jamais.

Ce concours se passe d'habitude à Paris vers le mois de juillet. Il comprend des épreuves multiples, écrites et orales, et le nombre des places est généralement faible; il y en a eu huit en 1898. A la suite des compositions écrites, 19 candidats avaient été admissibles; les 8 agrégés nommés se répartissent ainsi : les 5 premiers et le 7e sont des élèves de l'École normale supérieure; le 6e est un étudiant libre de la faculté des sciences de Paris, et le 8e est un professeur de collège.

Nous croyons intéressant, non seulement pour les candidats futurs, mais pour toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement en général, de donner ici quelques renseignements sur les épreuves de 1898 et le programme pour 1899.