Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1899)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FONDEMENTS DE L'ARITHMÉTIQUE MODERNE
Autor: Montessus, R. de
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1228

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES FONDEMENTS
DE L'ARITHMÉTIQUE MODERNE

La métaphysique des sciences mathématiques est à l'ordre du jour [1] et il est permis de penser que les difficultés très réelles et très grandes que présente cette étude des principes fondamentaux seront malaisément résolues au gré de chacun.

De nouvelles théories ont apparu [2]; mais pour l'instant les avis sont partagés.

On critique quelque peu les idées d'autrefois, on discute, on repousse même les idées d'aujourd'hui. On reproche aux méthodes anciennes de n'être point logiques, on accuse les méthodes nouvelles d'être artificielles, peu claires, difficilement accessibles.

Bref, les opinions diffèrent, d'une part quant au fond, de l'autre quant à l'opportunité, d'introduire les théories nouvelles dans l'enseignement [3]. Cependant on ne saurait nier qu'il soit nécessaire aux professeurs de méditer ces questions. Leur esprit ne pourra qu'y gagner en force et en profondeur, et l'enseignement en bénéficiera en fin de compte.

Entrons donc dans le corps de la question, nous bornant à l'exposition des nouveaux principes arithmétiques, bien que l'évolution soit générale [4].

I

Tout être matériel contingent possède, au moins selon l'idée commune, une nature, un mouvement, une forme qui le caractérisent.

---

(1) Cf. CALINON. *Études sur les diverses grandeurs en mathématiques*, G. V., 1897.

(2) TANNERY. *Arithmétique*, Alcan, 1894. — BOURLET. *Algèbre*, Alcan, 1896. — COR et RIEMANN. *Algèbre*, Nony, 1898. — PADÉ, *Premières leçons d'algèbre élémentaire*, G. V., 1892.

(3) Cf. par exemple A. POULAIN. *Le monde mathématique*, Études religieuses, juillet-août 1897.

(4) Cf. en Analyse, JORDAN. *Cours de l'École polytechnique*, G. V., 1891, en Physique, les divers ouvrages de MM. POINCARRÉ et DUHEM; en Chimie, ceux de M. BERTHELOT.

Mettre à part la nature des êtres et ne retenir que leurs mouvements et leurs formes, c'est créer une abstraction ; abandonner la considération de leurs mouvements pour ne considérer que leurs formes, c'est créer une nouvelle abstraction, d'un ordre plus élevé ; laisser enfin la forme de côté, c'est atteindre une dernière abstraction, le nombre, qui dérive des idées d'unité et de pluralité, celles-ci provenant elles-mêmes de la conscience du « moi » (1).

Il est, dès lors, logique d'étudier le nombre en lui-même, puis la forme et les combinaisons de nombre et de forme, enfin les combinaisons de nombre, de mouvement et de forme, d'où trois sciences : l'Arithmétique générale, la Géométrie, la Mécanique, dont l'ensemble forme *la Mathématique*.

Dans la Mathématique, on abandonne le point de vue expérimental et on lui substitue le pur raisonnement; à cet effet, on définit des êtres de raison correspondant aux différentes abstractions auxquelles nous sommes déjà parvenus et de ces définitions on déduit, à l'aide de raisonnements logiques, diverses conséquences, dont l'ensemble constitue la Mathématique.

Or, tout raisonnement logique suppose une majeure, une vérité première, un axiome ; mais tout axiome portant sur un objet déterminé, il faut *avant tout* définir les objets des axiomes, c'est-à-dire, en Arithmétique, l'égalité et l'inégalité, l'addition et la soustraction.

Ces définitions, bien qu'arbitraires, sous la condition de n'être contradictoires, ni en elles-mêmes, ni dans leurs conséquences, seront prises de manière à cadrer avec le monde existant (2).

---

(1) « J'estime que sans la présence du monde extérieur, aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme; et que, seul dans l'univers et réduit à l'état de pure intelligence, le plus incomparable génie n'arriverait jamais à la notion du nombre 2, ce génie fût-il celui d'un Archimède, d'un Gauss et d'un Lagrange. »

C.-A. LAISANT. *La Mathématique,* Carré et Naud, 1898.

(2) On sait que l'étude des mondes *possibles*, au moyen de définitions appropriées, par exemple la Géométrie *non-euclidienne*, la Géométrie de l'hyperespace, donne lieu à des conclusions du plus haut intérêt.

« La géométrie à n dimensions a un objet réel. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises... La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate de corps qui tombent sous nos sens; elle est, avant tout, l'étude analytique d'un groupe. Rien n'empêche donc d'aborder

I. L'unité, juxtaposée à elle-même, ce qu'on indique par le signe $+$, donne naissance au nombre *deux;* l'unité, juxtaposée à deux, au nombre trois....., etc.

II. Deux nombres sont égaux si ceux qui les forment par juxtaposition d'une unité sont égaux, ceux qui forment ceux-ci égaux, etc., l'unité étant égale à elle-même et seulement à elle-même. Pour compléter la définition de l'égalité, nous dirons que le nombre a est plus petit que ceux qu'on en déduit par juxtaposition d'unités, d'où plus grand que celui dont il a été formé, que celui dont ce dernier provient, etc. Par analogie, l'unité sera regardée comme un nombre plus petit que tous les autres.

III. Le nombre $a+(b-1)+1$ est appelé somme de a et b et se représente par $a+b$, définition due à M. Poincaré [1]. Il est nécessaire d'ajouter :

1° Que le nombre $b-1$ est le nombre qui forme b quand on lui juxtapose l'unité ;

2° Que l'on forme $a+(b-1)+1$ en faisant la somme de a et $b-1$, $a+b$ étant le nombre obtenu par la juxtaposition d'une unité à cette somme ;

3° Que si l'on représente $b-1$ par c, $a+c$ sera le nombre $a+(c-1)+1$, etc., jusqu'à ce qu'on arrive au nombre $a+1+1$.

Faisons en passant une remarque des plus importantes, que *les définitions sont les principes féconds des mathématiques;* et, en effet, par exemple, notre définition de l'addition nous permettra en usant des axiomes — nous les énoncerons bientôt — de *démontrer* les deux propositions célèbres relatives au groupement et à l'inversion des termes d'une somme [2].

IV. Soustraire un nombre b d'un nombre a, c'est former un nouveau nombre c, tel qu'en ajoutant b à c on retrouve a, défini-

---

l'étude d'autres groupes analogues et plus généraux. » M. Poincaré, *Analysis situs*, Journal de l'École polytechnique.

Cf. aussi, du même auteur, *Acta*, tome II, à propos de la Géométrie non-euclidienne.

[1] *Revue de métaphysique et de morale*, janvier 1894.

[2] Ces deux démonstrations sont dues à M. Poincaré, *Revue de métaphysique*, *loc. cit.*

On sait que M. Helmoltz (Tannery, *Arithm.*, *loc. cit.*), avait essayé, lui aussi, de donner des démonstrations à ce sujet.

tion qui conduit immédiatement à la proposition fondamentale

$$a - b - c - \ldots = a - (b + c + \ldots) \text{ (1)}$$

si l'on se base, bien entendu, sur les axiomes que voici enfin :

I. Deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux ;

II. Les sommes de nombres égaux sont égales ;

III. Les différences de nombres égaux sont égales.

Vérités primitives, c'est-à-dire indémontrables, ou regardées généralement comme telles (2), évidentes, nécessaires, logiques et non morales, réelles et non verbales (3).

---

(1) Soit $a - b - c = d$, d'où, *par définition :*

$$a - b = d + c, \quad a = d + c + b = d + (b + c)$$
$$a - (b + c) = d = a - b - c$$

vu les propositions $a + (b + c) = a + b + c$ et $a + b = b + a$.

(2) On sait que Leibniz a donné une démonstration de ces axiomes : *La monadologie*, Ed. Boutroux et H. Poincaré, p. 159 et suiv., Delagrave, 1881.

(3) Les anciens énonçaient (*Euclide*, d'après Peyrard, 1814) quatre axiomes généraux :

I. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles ;

II. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux ;

III. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les touts seront égaux ;

IV. Le tout est plus grand que la partie.

Le moyen âge ajouta, on le croit du moins, les propositions :

α) Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux ;

β) Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux ;

γ) Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles ;

δ) Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles. J'ai remplacé dans les axiomes I, III (texte) le mot « grandeur » par le mot « nombre », mieux déterminé et suffisant à notre objet.

Bain, *Logique déductive et inductive*, traduction Compayré, Germer-Baillière, 1881, t. II, p. 227 et suiv., refuse le caractère d'axiome à la prop. IV d'Euclide et aux propositions $\alpha - \delta$. Il semble, en effet, que la proposition IV doive être regardée comme un tautologisme ; enfin, les propositions $\alpha - \delta$ peuvent être démontrées comme il suit. On pourra renvoyer les deux premières à la fin de la théorie générale des opérations, en tête du chapitre supplémentaire ayant trait aux opérations approchées à une unité près. Là, il sera aisé de les démontrer, si l'on a prouvé en cours de route que les produits, quotients, puissances, racines exactes d'égalités donnent lieu à de nouvelles égalités — les propositions γ, δ sont des cas particuliers de ces propositions — et remarqué que si $a > b$, il existe un nombre d tel que l'on ait $a - b = d$. Ainsi, soit à démontrer que si $a > b$ et $C = c$, $a + C > b + c$. Par hypothèse, $a - b = d$, d'où $a - b + C = d + c$, $a + C - b = d + c$, $a + C - (b + c) = d$; donc $a + C > b + c$. De même pour l'axiome β.

Les définitions fondamentales données, les axiomes posés, viendra la numération, puis les opérations ordinaires, addition et soustraction, multiplication et division, élévation aux puissances et extractions des racines, *en se bornant aux cas où ces opérations sont possibles ;* je veux dire qu'on supposera le nombre à soustraire plus petit que le nombre dont on veut le retrancher, le dividende multiple du diviseur, etc.

On pourra, d'ailleurs, traiter en un chapitre supplémentaire les opérations approchées à une unité près.

Ce faisant, nous aurons terminé la première partie de l'Arithmétique, étude des opérations fondamentales.

II

C'est ici le lieu d'observer que l'Arithmétique, l'Algèbre, l'Analyse sont les branches d'une science *unique*, branches faciles à distinguer. L'Algèbre en particulier n'est plus, pour nous, une Arithmétique supérieure, caractérisée par l'emploi des symboles littéraux et des nombres négatifs, mais la science des groupes de nombres [1] ; or, il ne serait pas nécessaire, en Algèbre, de revenir sur ses pas à propos de l'introduction des incommensurables et des imaginaires, si l'on étudiait ces nombres en Arithmétique, où leur place semble marquée, ou au moins si on les présentait d'un bloc, comme introduction à l'Algèbre [2]. On me l'accordera pour les incommensurables. Mais les imaginaires ? Mais les nombres négatifs ?

Or, pourquoi ceux-ci et non les autres ?

---

[1] Par exemple, l'addition algébrique peut être définie : étant donnés plusieurs groupes de nombres — polynômes —, A, B,... déterminer un autre groupe R, tel que la somme numérique des résultats de la substitution de valeurs numériques déterminées aux quantités littérales dans A, B,... soit identique au résultat de cette même substitution dans R, quelles que soient ces valeurs numériques. En général, les opérations algébriques élémentaires ne sont que l'étude des transformations de groupes donnés.

Dans le cas particulier où l'on attribue à toutes les lettres, sauf une, des valeurs numériques, si l'on se propose de déterminer la valeur numérique de la dernière lettre de manière que le groupe prenne une valeur donnée à l'avance, on a une équation numérique. L'extension aux équations littérales, aux équations simultanées, est immédiate.

[2] Cf. par exemple NETTO, *Vorlesungen über Algebra*. Teübner, Leipsig, 1896.