CORERSPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

CORERSPONDANCE

Paris, mai 1900.

Mon cher Laisant,

L'article de M. Redl dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique*, m'a remis en mémoire les analogies de Néper et de Delambre. Il y a quelque quarante ans, je faisais de la Cristallographie et en usais souvent ; mais il me fallait toujours les rechercher dans les traités, faute d'une démonstration simple me permettant de les retrouver rapidement ; j'y arrivai enfin comme suit.

Inscrivons une circonférence dans un triangle sphérique. Soit p le demi-périmètre ; on a de suite, si r est le rayon du cercle inscrit :

$$(1)\quad \operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin(p-b) = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin(p-c);$$

un cercle ex-inscrit de rayon r_a donne

$$(2)\quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin p = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\sin(p-c) = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\sin(p-b),$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\sin p \sin(p-a) = \sin(p-b)\sin(p-c).$$

Considérons maintenant le petit cercle circonscrit : si O est son centre,

$$OAB = OBA = \gamma,\ OAC = OCA = \beta,\ OBC = OCB = \alpha,$$
$$\alpha+\beta = C \quad \alpha+\gamma = B \quad \beta+\gamma = A.$$

Si on pose

$$2(\alpha+\beta+\gamma) = P = A+B+C,$$

on a

$$(3)\quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos(P-A)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos(P-B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\cos(P-C)},$$

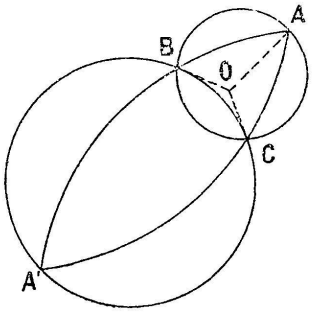

Fig. 1.

et le triangle A′ B C donnerait

$$(4)\qquad \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos P} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\cos(P-C)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}{\cos(P-B)},$$

et

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{\cos P \cos(P-A)} = \frac{1}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

On trouve ainsi les formules que M. Redl appelle du demi-angle.

J'arrive aux analogues.

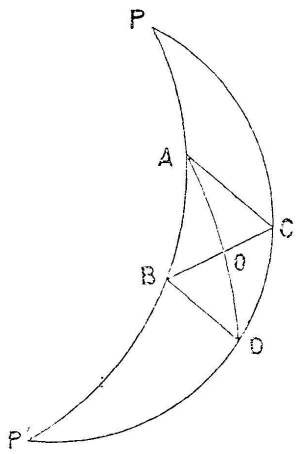

Fig. 2.

1. Soit un triangle ABC ; je construis le parallélogramme ABDC, en joignant A au milieu de BC, et prolongeant de OD = OA. ABDC est la projection sur la sphère d'un parallélogramme construit dans le plan tangent en O, et dont le centre serait en O. $OP = OP' = \frac{\pi}{2}$, $PA = P'D$, $PC = P'B$. Les quatre côtés sont égaux deux à deux, ainsi que les angles opposés ; mais la somme des dièdres BAC, DCA n'est pas 2 droits, comme dans le plan : quelle relation y a-t-il entre ces angles ? Egalons les valeurs du rayon du cercle ex-inscrit à PAC, et tangent à PC,

$$\operatorname{tg}\frac{CAP}{2}\sin\left(\frac{AP+PC+AC}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{PCA}{2}\sin\left(\frac{AP+PC-AC}{2}\right);$$

mais

$$CAP = \pi - A\ ,\ PCA = \pi - (B+C)\ ,\ AP + PC = \pi - CD = \pi - C\ ;$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\frac{c+b}{2},$$

et par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{c+b}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{cotg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}.$$

II. ABC étant toujours le triangle, on prolonge AB, et l'on prend $AC' = \pi - AC$; les angles AC'C, ACC' sont supplémentaires et l'on a

$$BC'C + BCC' + CBC' = \pi - C + \pi - B,$$
$$BC'C + BCC' - CBC' = B - C,$$

d'où, par la formule (4) appliquée à BC'C,

$$\operatorname{tg}\frac{BC}{2}\cos\frac{B-C}{2} = -\operatorname{cotg}\frac{BC'}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

et, par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

On peut donc établir toutes ces formules en partant du triangle rectangle.

S'il existe un triangle a, b, c, A, B, C, il existe :

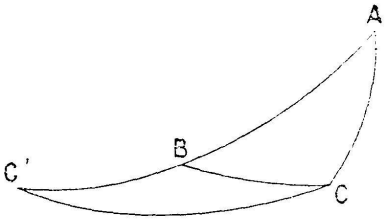

Fig. 3.

1° 1 triangle $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$;

2° 3 triangles a, $\pi - b$, $\pi - c$, A, $\pi - B$, $\pi - C$;

3° 3 triangles a, x, $\pi - a - b$, X, $\pi - C$, $\pi - (A + B)$;

4° 3 triangles, a, x, $\pi - (b - c)$, X, $\pi - B$, $\pi - (X - C)$.

A une relation quelconque entre les éléments du premier correspond par 1° et 2° une relation entre le même nombre d'éléments, qui peut être identique à la première; par 3°, 4°, il n'en est plus de même ; une relation du triangle primitif ne se transforme en une autre relation de ses éléments, que si elle ne contient que a, $b + c$, B et C pour 3°, et a, c, B et C + A pour 4°.

Pratiquement, je ne me servais que de 3 relations (1), qui par les transformations 2° donnent les relations (2) ; de (1) et (2) par la transformation 1° on déduit (3) et (4) ; et par les transformations 3° et 4° on déduit les analogies de (2) et (4).

Bien à vous,

A. Potier.

A propos d'un article de M. Frolov [1].

13 juin 1900.

Il n'y a pas de solution de continuité dans l'hypothèse non-euclidienne, comme l'affirme M. Frolov, et cette hypothèse est une et logique jusqu'au bout. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la figure 1, page 182, en la complétant comme suit : Soit menée AX bissectrice de l'angle TAA′ ; par un certain point M de cette ligne, on peut mener une parallèle BMB′ à AA′ et une parallèle B_1MB_1' à AT ; ces parallèles, qui sont également inclinées sur AX, sont distinctes tant qu'elles sont obliques à AX, c'est-à-dire tant que l'angle ABB′ n'est pas nul ; donc quand cet angle diminue et tend vers zéro, BB′ a pour limite non point TT′, mais l'asymptote commune de AA′ et TT′ qui est perpendiculaire à AX. En conséquence, la démonstration basée sur la figure 3 est incompréhensible.

Arrivons maintenant à la figure 5 ; les distances de BU et de AT augmentent de plus en plus, dit l'auteur, tandis que celles de BS et de AT diminuent, à mesure qu'on s'écarte de AB vers V et vers S ; qu'en faut-il conclure ?

Simplement ceci : le lieu des points de distance constante BA à TT′ est une *ligne* comprise entre BU et BS ; M. Frolov suppose *de plus* que c'est une *droite ;* quoiqu'il s'en défende, tel est son postulat, bien peu *dissimulé* comme on le voit.

P. Barbarin (Bordeaux).

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, n° 3, 2me année, p. 179-187, mai, 1900.
Au sujet de ce même article nous venons de recevoir une lettre de M. Tikhomandritzky, prof. à l'Université de Kharkoff; elle ne pourra être publiée que dans notre prochain numéro. La Direction.