Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CORERSPONDANCE

Paris, mai 1900.

Mon cher Laisant,

L'article de M. Redl dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique*, m'a remis en mémoire les analogies de Néper et de Delambre. Il y a quelque quarante ans, je faisais de la Cristallographie et en usais souvent ; mais il me fallait toujours les rechercher dans les traités, faute d'une démonstration simple me permettant de les retrouver rapidement ; j'y arrivai enfin comme suit.

Inscrivons une circonférence dans un triangle sphérique. Soit p le demi-périmètre ; on a de suite, si r est le rayon du cercle inscrit :

$$(1)\quad \operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin(p-b) = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin(p-c);$$

un cercle ex-inscrit de rayon r_a donne

$$(2)\quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin p = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\sin(p-c) = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\sin(p-b),$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\sin p \sin(p-a) = \sin(p-b)\sin(p-c).$$

Considérons maintenant le petit cercle circonscrit : si O est son centre,

$$OAB = OBA = \gamma,\ OAC = OCA = \beta,\ OBC = OCB = \alpha,$$
$$\alpha+\beta = C \quad \alpha+\gamma = B \quad \beta+\gamma = A.$$

Si on pose

$$2(\alpha+\beta+\gamma) = P = A+B+C,$$

on a

$$(3)\quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos(P-A)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos(P-B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\cos(P-C)},$$

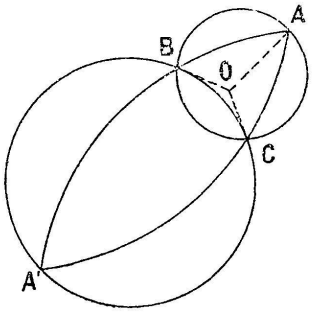

Fig. 1.

et le triangle A′ B C donnerait

$$(4)\qquad \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos P} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\cos(P-C)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}{\cos(P-B)},$$

et

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{\cos P \cos(P-A)} = \frac{1}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

On trouve ainsi les formules que M. Redl appelle du demi-angle.

J'arrive aux analogues.

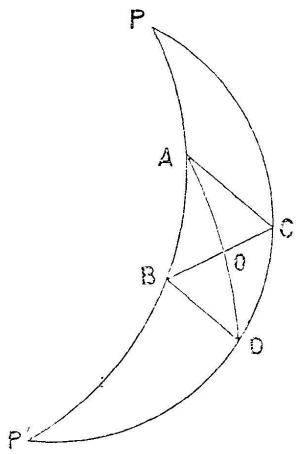

Fig. 2.

1. Soit un triangle ABC ; je construis le parallélogramme ABDC, en joignant A au milieu de BC, et prolongeant de OD = OA. ABDC est la projection sur la sphère d'un parallélogramme construit dans le plan tangent en O, et dont le centre serait en O. $OP = OP' = \frac{\pi}{2}$, $PA = P'D$, $PC = P'B$. Les quatre côtés sont égaux deux à deux, ainsi que les angles opposés ; mais la somme des dièdres BAC, DCA n'est pas 2 droits, comme dans le plan : quelle relation y a-t-il entre ces angles ? Egalons les valeurs du rayon du cercle ex-inscrit à PAC, et tangent à PC,

$$\operatorname{tg}\frac{CAP}{2}\sin\left(\frac{AP+PC+AC}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{PCA}{2}\sin\left(\frac{AP+PC-AC}{2}\right);$$

mais

$$CAP = \pi - A\ ,\ PCA = \pi - (B+C)\ ,\ AP + PC = \pi - CD = \pi - C\ ;$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\frac{c+b}{2},$$

et par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{c+b}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{cotg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}.$$

II. ABC étant toujours le triangle, on prolonge AB, et l'on prend $AC' = \pi - AC$; les angles AC'C, ACC' sont supplémentaires et l'on a

$$BC'C + BCC' + CBC' = \pi - C + \pi - B,$$
$$BC'C + BCC' - CBC' = B - C,$$

d'où, par la formule (4) appliquée à BC'C,

$$\operatorname{tg}\frac{BC}{2}\cos\frac{B-C}{2} = -\operatorname{cotg}\frac{BC'}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

et, par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

On peut donc établir toutes ces formules en partant du triangle rectangle.

S'il existe un triangle a, b, c, A, B, C, il existe :

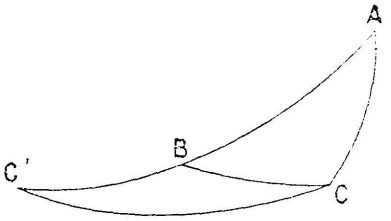

Fig. 3.

1° 1 triangle $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$;

2° 3 triangles a, $\pi - b$, $\pi - c$, A, $\pi - B$, $\pi - C$;

3° 3 triangles a, x, $\pi - a - b$, X, $\pi - C$, $\pi - (A + B)$;

4° 3 triangles, a, x, $\pi - (b - c)$, X, $\pi - B$, $\pi - (X - C)$.

A une relation quelconque entre les éléments du premier correspond par 1° et 2° une relation entre le même nombre d'éléments, qui peut être identique à la première; par 3°, 4°, il n'en est plus de même ; une relation du triangle primitif ne se transforme en une autre relation de ses éléments, que si elle ne contient que a, $b + c$, B et C pour 3°, et a, c, B et C + A pour 4°.

Pratiquement, je ne me servais que de 3 relations (1), qui par les transformations 2° donnent les relations (2) ; de (1) et (2) par la transformation 1° on déduit (3) et (4) ; et par les transformations 3° et 4° on déduit les analogies de (2) et (4).

Bien à vous,

A. Potier.