Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE DE L'ÉQUATION QUADRATIQUE
Autor: Macfarlane, Al.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3577

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORIE DE L'ÉQUATION QUADRATIQUE

La théorie courante de l'équation quadratique peut être établie comme il suit :

Une équation quadratique à coefficients réels a, soit deux racines réelles, soit deux racines imaginaires, le cas de séparation ayant lieu lorsque les racines sont égales. Si l'équation est représentée par :

$$x^2 + 2a\,x + b = 0$$

les deux racines sont :

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}$$

et

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 - b}$$

Si a^2 est plus grand que b, le radical se prête à une simple addition algébrique avec $-a$, et les deux racines sont réelles. Les deux termes peuvent être représentés par des segments d'une seule et même ligne droite et leur somme est aussi un simple segment. Mais quand a^2 est plus petit que b, c'est $\sqrt{b-a^2}$ qui est réel et les deux racines sont représentées par :

$$x_1 = -a + \sqrt{-1}\,\sqrt{b-a^2} \qquad x_2 = -a - \sqrt{-1}\,\sqrt{b-a^2},$$

On sait que, comme le terme radical est affecté du symbole $\sqrt{-1}$, il ne peut être combiné avec $-a$ par simple addition. On sait que les deux termes ne peuvent être représentés par des segments d'une seule et même ligne droite, mais que le terme radical doit être représenté suivant une ligne formant un angle droit avec celle sur laquelle $-a$ est représenté. Pour cette raison, la racine est dite complexe et on sait que le plan est nécessaire pour sa représentation adéquate. Comme conséquence, on sait que $\sqrt{-1}$ indique que l'axe pour le terme imaginaire est à

angle droit sur l'axe pour le terme réel, autrement dit, cela démontre que l'axe réel tourne d'un angle droit.

Le point de vue auquel je me place est le suivant :

Dans tous les cas, la signification de $\sqrt{-1}$ est scalaire ; ce symbole ne signifie rien de plus que l'indication qu'il doit donner, c'est-à-dire que le carré du terme affecté est négatif. Il ne s'en suit pas que deux segments d'une ligne dont l'un est affecté de $\sqrt{-1}$ et l'autre ne l'est pas, ne se composent pas en quelque chose de réel ; je montrerai que leur simple addition correspond à une réalité géométrique. De cette manière de voir, on déduit que les racines ont toujours une signification scalaire.

Mais dans les deux cas, les racines se prêtent aussi à ce que nous pouvons appeler une signification planaire. Soit que β représente un axe de longueur égale à l'unité, et soit β^2 égal à $+1$; alors dans le dernier cas, lorsque a^2 est plus petit que b,

$$x_1 = -a + \sqrt{b - a^2}\,\sqrt{-1}\,\beta$$

représente une quantité complexe circulaire, tandis que dans le premier cas

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}\,\beta$$

représente une quantité complexe hyperbolique.

La preuve que cette quantité hyperbolique satisfait à l'équation est la suivante :

$$\begin{array}{rl}
x_1^2 = & a^2 + a^2 - b - 2a\sqrt{a^2 - b}\,\beta \\
+\,2ax_1 = & \quad -2a^2 \quad + 2a\sqrt{a^2 - b}\,\beta \\
+\;\;b = & b \\
\hline
x_1^2 + 2ax_1 + b = & 0 \qquad + 0.
\end{array}$$

Le tout est égal à o, parce qu'il se décompose en une partie scalaire et une partie vectorielle qui sont séparément égales à o.

La même preuve s'applique à la quantité complexe circulaire.

Conformément à cette théorie, le symbole $\sqrt{-1}$ est caractéristique de la quantité complexe circulaire, tandis qu'il est absent dans la quantité complexe hyperbolique ; et ceci s'accorde avec ce fait algébrique, que

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

tandis que

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{-1}\, y)\,(x - \sqrt{-1}\, y).$$

La signification de la quantité complexe scalaire résultera de la considération de la Trigonométrie d'un angle complexe

Soit (fig. 1) que AOP représente un angle circulaire, et POQ un angle hyperbolique; OA et OB sont les demi-axes du cercle, OP et OD ceux de l'hyperbole équilatère. Menons PM et QK parallèles à la tangente en A, et par suite perpendiculaires à OA; puis QN parallèle à la tangente commune en P, et par suite perpendiculaire à OP. De N, menons NL et NR parallèles à PM et OA, respectivement. Représentons par u et v, respectivement, les angles circulaire et hyberbolique ; alors, comme M. Laisant l'a montré dans son *Essai sur les fonctions hyperboliques*, les définitions premières des fonctions trigonométriques de ces angles sont

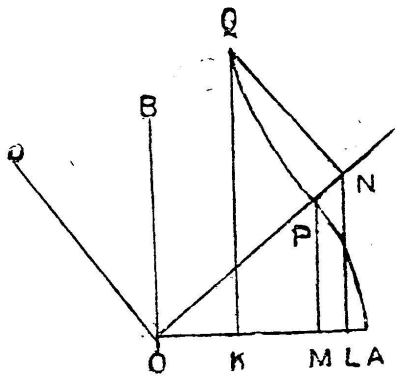

Fig. 1.

$$\cos u = \frac{OM}{OA}, \quad \sin u = \frac{MP}{OB}, \quad \cosh v = \frac{ON}{OP}, \quad \sinh v = \frac{NQ}{OD}.$$

D'après ces définitions, les fonctions sont entièrement scalaires, parce que la direction des deux termes dans chaque rapport est la même. Si nous réduisions les relations ci-dessus à

$$\cos u = \frac{OM}{OA}, \quad \sin u = \frac{MP}{OA}, \quad \cosh v = \frac{ON}{OP}, \quad \sinh v = \frac{NQ}{OP},$$

alors, dans le cas de $\sin u$, ce sont seulement les longueurs de MP et de OA que l'on considère, sans avoir égard à leur différence de direction ; et de même pour $\sin hv$.

On a coutume de définir les fonctions de l'angle complexe analytiquement ; mais elles ont une définition géométrique. Les définitions de l'angle complexe ci-dessus sont

$$\cos (u + \sqrt{-1}\, v) = \frac{OK}{OA},$$

et

$$\sin (u + \sqrt{-1}\, v) = \frac{KQ}{OB},$$

expression qui peut s'écrire dans le cas ci-dessus $\frac{KQ}{OA}$.

Considérons maintenant l'addition de ces angles d'un point de vue géométrique. Nous avons

$$OK = OL - LK = \frac{ON}{OP} OM - NQ \frac{MP}{OP};$$

donc

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OM}{OA} \frac{ON}{OP} - \frac{MP}{OA} \frac{NQ}{OP}$$
$$= \cos u \cosh v - \sin u \sinh v.$$

De plus

$$KQ = LN + RQ = \frac{ON}{OP} MP + NQ \frac{OM}{OP};$$

donc

$$\frac{KQ}{OA} = \frac{MP}{OA} \frac{ON}{OP} + \frac{OM}{OA} \frac{NQ}{OP}$$
$$= \sin u \cosh v + \cos u \sinh v.$$

Considérons maintenant le signe d'un point de vue géométrique. L'angle complexe ci-dessus est exprimé par $u + \sqrt{-1}\, v$, et

$$\cos(u + \sqrt{-1}\, v) = \cos u \cosh v - \sqrt{-1} \sin u \sinh v,$$
$$\sin(u + \sqrt{-1}\, v) = \sin u \cosh v + \sqrt{-1} \cos u \sinh v.$$

Ainsi l'Analyse conduit au symbole $\sqrt{-1}$ comme affectant le second terme, tandis que la Géométrie donne les mêmes formules sans $\sqrt{-1}$. Nous en concluons que les parties sont ajoutées linéairement comme résultat final, mais que le symbole $\sqrt{-1}$ doit être conservé dans une période intermédiaire du calcul. De toutes façons, dans cette quantité scalaire complexe, le symbole $\sqrt{-1}$ n'a aucune signification *directionnelle*, il signifie simplement que le carré de la quantité à laquelle il est attaché doit être prise avec le signe négatif. Les deux termes de la quantité sont représentés par des segments d'une seule et même droite. La justification complète de cette théorie se trouve dans les développements auxquels elle conduit ; mais je puis indiquer ici le chemin par lequel j'y arrive.

L'application, à la décharge d'un condensateur électrique, du

principe de la conservation de l'énergie, conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

où q représente la charge au temps t, R la résistance, L la puissance d'induction du circuit et C la capacité du condensateur.

Si $q = Ae^{mt}$ est supposé être la solution de l'équation, alors m doit être tel que

$$Ae^{mt}\left(m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

relation qui se réduit à $m^2 + 2am + b = 0$, si par abréviation a est écrit à la place de la quantité positive $\frac{R}{2L}$, et b à la place de la quantité positive $\frac{1}{LC}$.

La théorie courante de l'équation quadratique conduit aux solutions suivantes de l'équation différentielle.

Dans le cas des racines réelles,

$$q = c_1 e^{-(a-\sqrt{a^2-b})t} + c_2 e^{-(a+\sqrt{a^2-b})t};$$

Dans le cas des racines imaginaires,

$$q = c_1 e^{-(a-\sqrt{-1}\sqrt{b-a^2})t} + c_2 e^{-(a+\sqrt{-1}\sqrt{b-a^2})t}$$

et dans le cas de transition,

$$q = e^{-at}(c_1 + c_2 t).$$

Dans le cas imaginaire, la solution apparemment impossible se réduit, après beaucoup de travail, à la forme :

$$q = Ae^{-at}\sin\left\{\sqrt{b-a^2}\,t + \varphi\right\}$$

La réduction peut être effectuée d'une façon très claire et très directe en traitant les racines imaginaires comme des quantités complexes planaires de la forme

$$-a + \sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,\beta \text{ et } -a - \sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,\beta;$$

et une réduction analogue est possible dans le cas des racines

réelles, en les traitant comme des quantités complexes hyperboliques de la forme :

$$-a+\sqrt{a^2-b}\,\beta \text{ et } -a-\sqrt{a^2-b}\,\beta.$$

Supposons que la quantité réelle a^2-b soit désignée par n. Dans le cas imaginaire,

$$m_1=-a+\sqrt{-1}\,n\beta \quad m_2=-a-\sqrt{-1}\,n\beta$$

de là

$$q_1=e^{-at+c+\sqrt{-1}(nt+\varphi)\beta}$$

et

$$q_2=e^{-at+c-\sqrt{-1}(nt+\varphi)\beta}.$$

où un terme arbitraire a été ajouté aux parties scalaires et vectorielle de m.

Maintenant q_1 et q_2 dénotent des spirales convergentes équiangulaires différant seulement en ce que l'une est la réflexion de l'autre par rapport à la ligne initiale. De là, si nous ajoutons les deux, nous avons deux fois la projection horizontale, et si nous retranchons, nous avons deux fois la projection verticale. Suivant les conditions initiales du problème, nous aurons à ajouter ou à retrancher ; dans le cas du problème ci-dessus, nous devons retrancher.

De là

$$q=2e^c\,e^{-at}\sin(nt+\varphi).$$

Dans le cas réel nous avons :

$$m_1=-a+n\beta \quad m_2=-a-n\beta$$
$$q_1=e^{-at+c+(nt+\varphi)\beta}$$
$$q_2=e^{-at+c-(nt+\varphi)\beta}$$

et

$$q=2e^{c-at}\sinh(nt+\varphi).$$

La première équation représente la décharge d'un condensateur quand il oscille; la dernière, quand il n'oscille pas. L'analyse ici donnée correspond à la méthode graphique dont se servent actuellement les électriciens dans l'étude des courants alternatifs.

Nous nous trouvons ainsi conduit à la conception d'une spirale hyperbolique équiangulaire convergente, laquelle est précisément l'analogue de la spirale circulaire équiangulaire convergente.

Je crois que cette courbe est nouvelle, car je ne la trouve pas dans la très complète *Bibliographie des courbes géométriques*, de M. Brocard.

Les spirales correspondantes sont représentées par les figures 2 et 3.

La fonction $Ae^{-at} \sin(nt + \varphi)$ représente la projection verticale

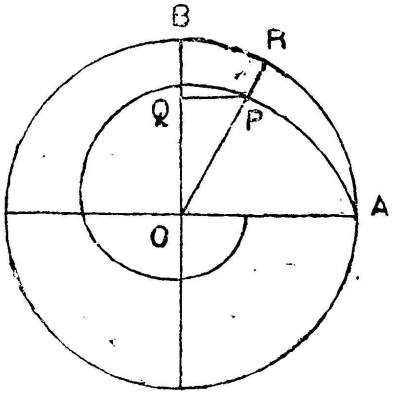

Fig. 2.

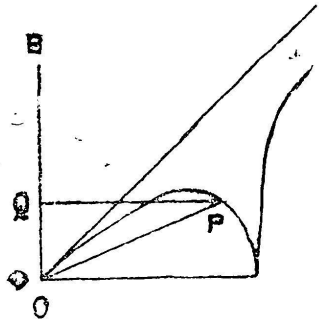

Fig. 3.

d'un mouvement uniforme circulaire d'amplitude A, de vitesse angulaire n et d'époque φ. De même la fonction

$$Ae^{-at} \sin(nt + \varphi)$$

représente la projection verticale du mouvement spiral circulaire du point P ayant pour vitesse angulaire n, pour époque φ et pour amplitude décroissante logarithmique Ae^{-at}.

De la même manière, la fonction

$$Ae^{-at} \sin h\,(nt + \varphi)$$

représente la projection verticale du mouvement spiral hyperbolique du point P, ayant pour vitesse angulaire hyperbolique n, pour époque l'angle hyperbolique φ et pour amplitude Ae^{-at}.

Cette spirale est convergente, car n est pas nécessairement moindre que a.

Le point R décrit le mouvement uniforme primaire; le point P décrit le mouvement spiral et le point Q décrit le mouvement harmonique correspondant.

AL. MACFARLANE (South-Bethleem. Penn. U. S. A.)