SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Autor(en): **Lelieuvre, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3580

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

les systèmes de logique algorithmique ; les uns et les autres sont d'ailleurs parfaitement compatibles, attendu qu'ils sont radicalement différents en principe et ne sauraient en aucune manière se remplacer. L. C.

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

La recherche des conditions que doivent remplir deux coniques pour qu'on puisse inscrire dans l'une un polygone circonscrit à l'autre, est une question bien connue : elle se résume dans le théorème suivant. énoncé par Poncelet : *s'il existe un polygône de* m *côtés inscrit dans une conique O et circonscrit à une autre* Γ, *il en existe une infinité d'autres du même nombre de côtés*. Beaucoup de problèmes qui se rattachent à cette proposition ont été résolus par des méthodes variées et il est par conséquent utile, et d'un incontestable intérêt, au point de vue de l'enseignement surtout, d'envisager la question dans son ensemble : c'est ce que je me suis proposé de faire, en suivant un beau chapitre d'Halphen sur le sujet [1]. Je diviserai cet exposé en deux parties : l'une, toute élémentaire qui ramène en somme le problème à ses éléments les plus simples, la seconde qui le rattache à la théorie des fonctions elliptiques, et qui suppose la connaisssnce des fondements de cette théorie.

I

Relation biquadratique symétrique entre deux variables. — Les deux sommets situés sur un côté d'un polygone inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre conique Γ sont deux points M et M′ de la conique C qui se correspondent sur cette ligne par la condition que la droite qui les joint soit tangente à Γ. On peut de cette manière faire correspondre à tout point M de C, deux

---

[1] Halphen. *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, ch. x.

autres points M′ et M″ de cette conique situés sur les tangentes à Γ qui sont issues de M ; d'ailleurs, au point M′ de C, correspondront de cette manière deux points de C dont l'un sera M. Supposons alors que les points de C, qui est unicursale, soient déterminés individuellement en fonction rationnelle d'un paramètre, de sorte que les coordonnées homogènes de chacun d'eux sont proportionnelles à des polynômes quadratiques par rapport à ce paramètre : les paramètres x et y de deux points correspondants M et M′ seront liés par une relation *biquadratique symétrique* qui pourra s'écrire :

$$\text{(I)} \qquad Ax^2y^2 + Bxy(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy + E(x+y) + F = 0$$

ou encore :

$$y^2(Ax^2 + Bx + C) + y(Bx^2 + Dx + E) + Cx^2 + Ex + F \equiv Py^2 + Qy + R = 0.$$

(Les coefficients des termes semblables des polynômes entiers en x, P, Q et R, forment un déterminant symétrique.)

Réciproquement, toute relation de la forme (I) peut être interprétée comme établissant entre deux points M et M′ de C, de paramètres x et y, une correspondance telle que la droite qui les joint soit tangente à une conique fixe Γ : car cette relation revient à une relation quadratique entre $x + y$ et xy, et par conséquent équivaut à une relation quadratique homogène entre les coordonnées homogènes u, v, w de la droite MM′, qui sont, comme on sait, proportionnelles à des fonctions linéaires de $x + y$ et xy. (La conique Γ peut, bien entendu, dégénérer en une variété tangentielle formée de deux points, distincts ou confondus.)

Observons d'ailleurs que cette correspondance entre M et M′ revient à la suivante : les deux points M et M′ sont conjugués par rapport à la conique C_1, telle que Γ soit la conique *covariante* de C et de C_1, enveloppe des cordes que ces deux coniques divisent harmoniquement : il est bien facile de déduire de la relation (I) l'équation de C_1. De là résulte la corrélation entre le problème des polygones de Poncelet et celui des polygones inscrits dans une conique C et *conjugués* par rapport à une autre C_1 : l'étude du premier problème équivaut à celle du second.

Remarquons enfin que la correspondance que nous établissons entre deux points M et M′ de C peut être remplacée par celle des

deux tangentes à Γ issues d'un même point de C : dans la suite nous emploierons seulement la première.

Généralisation. — Plus généralement, la relation fondamentale (I) établit entre deux points M et M′ d'une courbe *unicursale quelconque* U, définis individuellement, l'un par le paramètre x, l'autre par y, une correspondance telle qu'au point M en correspond deux autres M′ et M″, et qu'à M′ en correspondent deux *dont l'un est* M. Il s'en suit que la relation (I) peut être regardée comme définissant une famille de lignes polygonales inscrites dans U : car partons d'un point M_0 quelconque de U comme sommet initial de la ligne brisée ; le sommet suivant sera un des points que lui fait correspondre la relation (I), soit M_1 ; alors le troisième sommet sera déterminé sans ambiguïté : ce sera le correspondant de M, *autre que* M_0, et ainsi de suite. Nous allons maintenant adopter cette interprétation de la relation (I).

Correspondance entre les extrémités des lignes brisées de m *côtés.* — Au sommet initial M_0 choisi pour une ligne brisée inscrite de m côtés, correspondront sur U deux extrémités possibles E′ et E″ pour cette ligne, suivant le choix du second sommet. Réciproquement, à l'extrémité E′ correspondront les deux sommets initiaux possibles dont l'un sera M_0. Donc le paramètre x de M_0 et le paramètre z de l'extrémité doivent être liés par une relation de la forme (I), soit $F(x, z) = 0$, biquadratique et symétrique en x et z.

Il est clair qu'on pourrait former cette relation de proche en proche, car la relation (I) permet évidemment d'exprimer rationnellement par rapport aux paramètres x et y des deux premiers sommets, ceux de tous les sommets suivants.

Lignes brisées repliées. — La relation (I) fait correspondre à x deux valeurs y' et y'' de y, *généralement* distinctes de x et distinctes entre elles. Il y a exception pour les valeurs de x telles que $y' = y''$; elles sont les racines (finies ou infinies) de l'équation (du quatrième degré en général) : $Q^2 - 4PR = 0$. Il y a également exception pour les valeurs de x telles qu'une valeur correspondante y' de y soit égale à x ; ces valeurs de x sont les racines de l'équation du quatrième degré obtenue en faisant dans (I) $y = x$. Appelons S^i ($i = 1, 2, 3, 4$) les quatre points

de U qui correspondent aux valeurs de x telles que $y' = y''$ et T_i ceux qui correspondent aux paramètres x tels que $y' = x$. Si dans le tracé d'une ligne brisée inscrite, nous arrivons en un point S_i comme sommet, la ligne ne pourra se continuer au delà de ce point qu'en se *repliant* sur elle-même et le sommet qui suivra S_i se confondra avec le précédent. Si nous arrivons en un point, T_i, en supposant que le sommet précédent corresponde à la valeur de y qui diffère du paramètre x du point T_i, le sommet suivant sera confondu avec T_i et le côté correspondant sera la tangente à U au point T_i considéré ; puis la ligne ne pourra se continuer qu'en se *repliant* sur elle-même.

Polygones inscrits de m *côtés.* — La relation (I) peut-elle déterminer des lignes brisées *fermées* d'un nombre donné m de côtés, inscrites dans U ? Pour cela, il faut que le $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet obtenu par la construction indiqué coïncide avec le premier. Or le paramètre x du premier sommet et celui z du $(m+1)^{\text{ème}}$ sont liés par une relation biquadratique symétrique $F(x, z) = 0$. Le paramètre x devra donc être une des quatre racines (finies ou non) de l'équation de *fermeture :* $F(x, x) = 0$; d'où *généralement quatre* solutions. Elles sont faciles à prévoir : supposons d'abord m pair, soit $m = 2n$; partons d'un point S_i comme sommet initial et construisons le $(n+1)^{\text{ème}}$ sommet P_i qui en résulte sans ambiguïté ; une des lignes brisées inscrites de sommet initial P_i sera formée d'abord de celle qu'on vient de construire pour obtenir P_i : S_i sera son $(n+1)^{\text{ème}}$ sommet et elle ne pourra se continuer au delà qu'en se repliant sur elle-même pour revenir à P_i comme $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet : on aura alors construit une ligne brisée fermée répondant à la question. Soit au contraire m impair, égal à $2n+1$: partons d'un point T_i, prenons un premier côté non tangent à U et allons jusqu'au $n^{\text{ème}}$ sommet Q_i : une ligne brisée d'origine Q_i, formée d'abord de celle qu'on vient de parcourir, arrivée en T_i comme $n^{\text{ème}}$ sommet s'y repliera, en se continuant par la tangente en T_i et en revenant à Q_i comme $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet.

Comme il y a quatre points S_i et quatre points T_i, on a donc ainsi les seules solutions de la question dans le cas général, et ce ne sont pas des polygones proprement dits.

Théorème de Poncelet. — Il résulte de là que *si la relation* (I) *détermine un polygone proprement dit de* m *côtés inscrit dans* V, *elle en détermine une infinité de ce même nombre de côtés, et l'on peut prendre un sommet de l'un d'entre eux en un point quelconque de la courbe.* En effet l'équation $F(x, x) = 0$ doit être vérifiée *identiquement.*

Application aux coniques. — Supposons que la courbe unicursale U soit une conique C: les lignes brisées correspondantes à (I) et inscrites dans C seront, comme on l'a vu, circonscrites à une conique fixe Γ. Les points S_i seront les points de C d'où les tangentes menées à Γ seront confondues: ce sont donc les *points communs* aux deux coniques C et Γ. Les points T_i seront les points de C d'où une des tangentes menées à Γ sera aussi tangente à C: ce seront donc les *points de contact avec* C *des tangentes communes à* C *et à* Γ. S'il existe *un* polygone de m côtés inscrit dans C, circonscrit à Γ, et *autre que les quatre solutions repliées du cas général,* il y en aura une *infinité.* Lorsque m ne dépasse pas 5, on peut toujours construire une conique Γ inscrite dans un polygone quelconque de m côtés inscrit dans C; d'une manière générale, quel que soit m, pour que le théorème de Poncelet soit applicable aux coniques C et Γ, il faut et il suffit qu'on puisse inscrire dans C et circonscrire à Γ une ligne brisée fermée de m côtés commençant en un point de C *autre* que les points P_i ou Q_i trouvés ci-dessus, par exemple en l'un des points S_i ou T_i. *Exemple :* je joins deux points A et B de C et je mène la tangente BT à C au point B. Si je construis une conique Γ tangente à AB en A et à BT en un point arbitraire, il y aura une infinité de triangles inscrits dans C et circonscrits à Γ, à cause de l'existence du triangle particulier dont les côtés sont AB, BT, BA, suivis successivement en *partant de A.*

II

Équation d'Euler [1]. — Les variables x et y liées par la relation (I) satisfont à l'équation différentielle obtenue de la façon suivante :

---

(1) Voir LACOUR, *N. A. de Mathématiques,* 1899, p. 293.

On a en différentiant (I) et en désignant par P_1, Q_1, R_1 les polynômes obtenus en remplaçant x par y dans P, Q, R :

$$(2Py + Q)dy + (2P_1x + Q_1)dx = 0;$$

Mais en vertu de (I) on a :

$$2Py + Q = \pm\sqrt{Q^2 - 4PR} = \pm\sqrt{X}$$

en désignant par X le polynôme biquadratique $Q^2 - 4PR$ (qui peut s'abaisser à un degré moindre, une de ses racines au moins devenant infinie). Si j'appelle Y ce que devient X par la permutation de y et de x, je vois que x et y variant, ils demeurent liés par l'équation :

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

On appelle *équation différentielle d'Euler* toute équation de cette forme, dans laquelle X est le polynôme général du quatrième degré en x, et Y le même polynôme en Y, soit par exemple :

$$X = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Réciproquement, toute équation d'Euler (II) *s'intègre à l'aide d'une relation algébrique* (I) *entre* x *et* y. — Il suffit de choisir les polynômes P, Q, R de la relation (I) de sorte que l'on ait identiquement : $Q^2 - 4PR = X$. Or, interprétons l'équation (I) comme une correspondance entre deux points d'une conique C situés sur la même tangente à une autre conique Γ :

Si je me donne C arbitrairement, je devrai choisir Γ de telle sorte que les quatre point S_i communs à Γ et C soient précisément ceux dont les paramètres x sont les racines de $X = 0$.

La question se réduit alors à construire une conique particulière D passant par ces quatre points, que le polynôme X détermine sur C.

Si je représente par $C = 0$ et $D = 0$ les équations des coniques C et D, la conique Γ sera une quelconque de celles du faisceau linéaire ponctuel :

$$D + \lambda C = 0$$

et l'arbitraire λ jouera le rôle de la constante d'intégration, dans

l'intégrale générale obtenue en écrivant la condition qui exprime que la corde MM′ joignant les points de paramètres x et y sur C, est tangente à Γ.

D'ailleurs il est facile d'avoir une conique particulière D du faisceau linéaire : car je puis rapporter la conique C à un triangle de référence $\alpha = 0$ $\beta = 0$ $\gamma = 0$ tel que son équation par rapport à ce triangle soit :

$$C \equiv \beta^2 - \alpha\gamma = 0.$$

Les coordonnées homogènes α, β, γ d'un point courant M de C seront alors définies en fonction du paramètre x par :

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{1}.$$

Par suite si l'on considère la conique d'équation :

$$D = a_0\alpha^2 + a_1\alpha\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta\gamma + a_4\gamma^2 = 0$$

il est évident que les paramètres x de ses points communs avec C seront les racines de $X = 0$: d'où immédiatement l'intégrale générale algébrique de l'équation d'Euler.

Représentation elliptique de la correspondance (I). — Dans l'équation (II), les variables étant séparées, on peut aussi intégrer directement par quadrature des deux membres. Pour cela on devra (dans le cas général), recourir aux *fonctions elliptiques :* on sait[1] construire une fonction elliptique bipolaire $F(u)$ d'une variable u vérifiant l'équation différentielle :

$$\left[\frac{dF(u)}{du}\right]^2 = a_0F^4 + a_1F^3 + a_2F^2 + a_3F + a_4$$

(en supprimant, pour simplifier l'écriture, l'argument u au second membre). Les périodes 2ω et $2\omega'$ de $F(u)$ seront déterminées en fonction des coefficients a du polynôme X. Si dans l'équation (II) on pose alors

$$x = F(u),\ y = F(v),$$

elle deviendra :

$$du \pm dv = 0 \quad \text{d'où} \quad u \pm v = \text{constante}.$$

---

[1] Voir par exemple Appell et Lacour, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques*, p. 251.

D'ailleurs on sait qu'en appelant s la somme des pôles de $F(u)$ on a, quel que soit v : $F(s-v) = F(v)$; par suite un seul signe suffit devant v dans l'intégrale générale, qu'on peut dès lors écrire :

$$v = u + \mathcal{T}$$

$\mathcal{T}$ désignant une constante arbitraire. Ainsi, en posant $x = F(u)$ dans toute relation (I) engendrant l'équation (II), les deux valeurs correspondantes de y seront de la forme $y' = F(u + \mathcal{T}')$ et $y'' = F(u + \mathcal{T}'')$, $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ désignant deux quantités indépendantes de u et convenablement choisies ; d'ailleurs si l'on remplace u par $u + \mathcal{T}'$, les valeurs correspndantes à y' seront par suite $F(u + 2\mathcal{T}')$ et $F(u + \mathcal{T}' + \mathcal{T}'')$; l'une d'elles doit être x : en général ce sera la seconde en sorte que l'on peut toujours supposer $\mathcal{T}' + \mathcal{T}'' = 0$.

Ainsi à toute relation (I) *correspondent une fonction elliptique* $F(u)$ *et une constante* $\mathcal{T}$, *telles que si l'on y pose :* $x = F(u)$, *les deux valeurs correspondantes de* y *sont* $F(u + \mathcal{T})$ *et* $F(u - \mathcal{T})$.

Remarquons que ce théorème revient au *théorème d'addition* de la fonction elliptique $F(u)$.

Application aux lignes brisées inscrites dans une unicursale. — Si nous inscrivons dans une ligne unicursale U une ligne brisée déterminée par la relation (I), quand nous aurons construit la fonction $F(u)$ et calculé la constante $\mathcal{T}$ correspondante, nous pourrons déterminer les paramètres x des sommets successifs par des arguments u en progression arithmétique de raison $\mathcal{T}$, soit u, $u + \mathcal{T}$, $u + 2\mathcal{T}$... $u + m\mathcal{T}$... Par suite, la corde qui ferme la ligne brisés inscrite de m côtés joindra les points d'argument u et $u + (m - 1)\mathcal{T}$: quand u varie, c'est-à-dire quand on change de ligne brisée, les extrémités seront liées par la relation biquadratique symétrique entre $F(u)$ et $F[u + (m - 1)\mathcal{T}]$, qui correspondra par conséquent à la même équation d'Euler [obtenue par élimination de la constante $(m - 1)\mathcal{T}$] que la relation (I) : elle ne différera donc de cette relation (I) que par la constante d'intégration. D'où ce théorème particulier au cas où U est une conique C : *Si un polygone de* m *côtés est inscrit dans une conique* C *et si* m — 1 *de ses côtés restent tangents à une conique fixe* Γ, *le* $m^{\text{ième}}$

côté enveloppe une conique appartenant au même faisceau linéaire ponctuel que C *et* Γ.

Enfin la *condition de fermeture* de la ligne brisée inscrite de m côtés sera : $F(u+m\mathcal{T}) = F(u)$, d'où, en appelant s la somme des pôles de $F(u)$:

$$u + m\mathcal{T} \equiv u \quad \text{ou} \quad u + m\mathcal{T} \equiv s - u \ (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

La première équation est vérifiée, *quel que soit* u, pourvu que $m\mathcal{T} \equiv 0$: le théorème de Poncelet est alors applicable.

La seconde au contraire détermine le sommet d'argument u par la relation :

$$2u = s - m\mathcal{T} + 2k\omega + 2k'\omega',$$

K et K′ étant deux entiers arbitraires ; on peut dès lors réduire tout argument u qui y satisfait à l'une des quatre valeurs :

$$\frac{s - m\mathcal{T}}{2}, \quad \frac{s - m\mathcal{T}}{2} + \omega, \quad \frac{s - m\mathcal{T}}{2} + \omega', \quad \frac{s - m\mathcal{T}}{2} + \omega + \omega'.$$

Ce sont les arguments des sommets initiaux des quatre lignes brisées repliées qui sont, en général, les seules solutions de la question.

Ainsi la condition de fermeture de toute ligne brisée inscrite de m *côtés est :*

$$m\mathcal{T} \equiv 0.$$

Réduction à une forme canonique. — Il est commode de ramener la relation (I) à une forme telle que le polygone X correspondant, dans l'équation d'Euler (II), ait une des formes canoniques de Weierstrass ou de Legendre. On sait que la réduction de X à une telle forme peut se faire par une substitution homographique, qu'on effectuera à la fois sur x et sur y. *Mais on peut y arriver plus simplement ainsi :*

Interprétons la relation (I) *comme une correspondance entre deux points d'une conique* C *situés sur une même tangente à une autre conique* Γ : il suffit, pour obtenir le résultat demandé, d'un choix convenable du triangle de référence auquel on rapporte C et Γ, et de la réprésentation paramétrique de C.

Choisissons en effet, comme ci-dessus, un triangle de référence

formé de deux tangentes à C : $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ et de leur corde de contact $\beta = 0$ en sorte que l'équation de C soit : $C \equiv \beta^2 - \alpha\gamma = 0$. Représentons de plus un point de C en fonction du paramètre x par les équations :

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{1}.$$

Pour que le polynome X soit réduit par exemple à la forme de Weierstrass :

$$X = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

il faut d'abord que l'un des points communs aux deux coniques C et Γ, déterminés par $X = 0$, corresponde à x infini sur la conique C : on prendra donc un des quatre points communs à C et à Γ, soit S, pour sommet $\beta = \gamma = 0$ du triangle de référence, d'où le côté $\gamma = 0$ qui sera la tangente à C en ce point ; puis, un choix convenable de l'orientation du côté $\beta = 0$ permettra de faire que X soit privé de termes en x^2. L'équation de la conique Γ sera dès lors, d'après ce qu'on a vu, ramenée à la forme :

$$\Gamma \equiv 4\alpha\beta - g_2\beta\gamma - g_3\gamma^2 + 4k(\beta^2 - \alpha\gamma) = 0.$$

La fonction $F(u)$ sera maintenant réduite à $p(u, g_2, g_3)$ (que j'écrirai simplement : pu), et les paramètres des sommets successifs d'une ligne brisée considérée seront : $pu, p(u + \mathcal{T})\ldots$ $p(u + m\mathcal{T})\ldots$ En particulier, au point S, x est infini : si l'on pose alors $x = pu$, on pourra prendre en ce point $u = 0$: donc $p\mathcal{T}$ sera la valeur de x au sommet suivant, c'est-à-dire au point de rencontre de C avec la tangente à Γ en S. Comme cette tangente a pour équation : $\beta - k\gamma = 0$ on voit que l'on aura :

$$p\mathcal{T} = k$$

ce qui fixe $\mathcal{T}$ (au signe près). Il résulte aussi de là que les valeurs de k pour lesquelles Γ dégénère en deux droites doivent être celles des paramètres x des points communs à C et à Γ autres que S, c'est-à-dire les racines de l'équation $4k^3 - g_2 k - g_3 = 0$; d'où on déduit immédiatement l'équation en λ discriminante du faisceau linéaire (C, Γ), par rapport au triangle de référence de réduction ; prenons l'équation du faisceau sous la forme : $\Gamma + \lambda C = 0$: l'invariance des racines de l'équation en λ donnera

immédiatement les relations entre k (ou $\mathcal{T}$), g_2, g_3 et les invariants simultanés des deux coniques C et Γ rapportées à un triangle de référence quelconque. Si par rapport à un tel triangle, l'équation en λ du faisceau, $\Gamma + \lambda C = 0$ est :

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta_1\lambda + \Delta_1 = 0,$$

on trouve les formules suivantes, dans lesquelles ρ désigne un facteur arbitraire tenant à ce que le choix du triangle de référence ne suffit pas à fixer complètement les formules de la transformation de coordonnées :

$$\frac{4\rho^3}{\Delta} = \frac{12\rho^2 p\mathcal{T}}{\Theta} = \frac{2\rho p''\mathcal{T}}{\Theta_1} = \frac{p'\mathcal{T}}{\Delta_1}.$$

Conditions analytiques de fermeture. — Pour que la relation (I) définisse des polygones inscrits *fermés* de m côtés il faut et il suffit que la constante $\mathcal{T}$ correspondante satisfasse à : $m\mathcal{T} \equiv 0$ c'est-à-dire à : $pm\mathcal{T} = \infty$. D'où une première méthode évidente pour exprimer cette condition : chercher à exprimer $pm\mathcal{T}$ en fonction de $p\mathcal{T}$, g_2, g_3 ; on pourra ensuite revenir de là aux invariants simultanés Δ, Θ, Θ_1, Δ_1 ; on est ainsi conduit au problème de la *multiplication de l'argument.*

Multiplication de l'argument [1]. — La fonction doublement périodique paire pmu doit être une fonction rationnelle de pu. Cherchons cette fonction rationnelle à l'aide de la formule :

$$(1) \qquad pmu - pu = -\frac{\sigma(m+1)u\,\sigma(m-1)u}{\sigma^2 mu\,\sigma^2 u}.$$

On a d'autre part :

$$pmu - pu = -\frac{1}{m^2}\left[\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}\sigma mu - \frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}(\sigma u)m^2\right]$$

c'est-à-dire :

$$pmu - pu = -\frac{1}{m^2}\,\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}\,\frac{\sigma mu}{(\sigma u)m^2}.$$

Ceci conduit à considérer la fonction auxiliaire $\psi_m(u) = \dfrac{\sigma mu}{\sigma u m^2}$: On voit immédiatement qu'elle est doublement périodique aux

[1] Voir Lévy, *Précis sur les fonctions elliptiques*, p. 191, — Greenhill, *Traité*, p. 454. La méthode suivie ici est plus simple que celles de ces deux ouvrages.

périodes 2ω et $2\omega'$, et n'a d'autres pôles que $u = 0$ à la multiplicité $m^2 - 1$; elle est donc une fonction entière de pu et $p'u$: d'ailleurs, sa parité est celle de m : si m est pair, elle sera donc une fonction entière de pu, et si m est impair, le produit de $p'u$ par une telle fonction. Le calcul de pmu se ramène alors facilement à celui des fonctions ψ, car la formule (1) donne immédiatement :

$$(1') \qquad pmu - pu = -\frac{\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)}{\psi_m^2(u)} = -\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{du^2}\mathrm{L}\psi_m(u)$$

d'où la relation de récurrence (où je supprime l'écriture de l'argument u) :

$$(3) \qquad m^2\psi_{m+1}\psi_{m-1} = \psi_m\psi''_m - \psi'^2_m.$$

Il suffit donc de connaître ψ_1 et ψ_2 pour déduire de là les suivantes ; or on a : $\psi_1 = 1$ et $\psi_2 = \frac{\sigma 2u}{\sigma(u)^4}$ d'ordre 3 ; d'où aussitôt : $\psi_2 = -p'u$. On en déduit facilement par la formule (3) :

$$\psi_3 = 3pp'^2 - \frac{1}{4}p''^2 \quad \psi_4 = p'(p'^4 - p''\psi_3) \text{ etc.}$$

On aura ensuite pmu par (1') :

$$pmu = \frac{p\psi_m^2 - \psi_{m+1}\psi_{m-1}}{\psi_m^2}.$$

D'ailleurs, une fois les deux termes exprimés en fonction rationnelle de pu, la fraction est *irréductible* : car ψ_m^2 sera un polynôme entier en pu de degré $m^2 - 1$, puisque $u = 0$ est pôle d'ordre $2(m^2 - 1)$ de la fonction ; or pmu doit précisément devenir infini par $m^2 - 1$ valeurs finies de pu, correspondantes à $mu \equiv 0$, $u = 0$ étant excepté.

La condition de fermeture des lignes inscrites de m côtés sera donc : $\psi_m^2(\mathcal{T}) = \mathrm{E}(p\mathcal{T}) = 0$, E désignant un polynôme entier de degré $m^2 - 1$.

On revient facilement de là aux conditions invariantes relatives aux deux coniques C et Γ : il n'y a qu'à substituer aux quantités $p\mathcal{T}, g_2, g_3$, les invariants simultanés par les formules ci-dessus ;

pour $m = 3$ par exemple, on retrouve aussitôt la condition connue $4\Theta\Delta - \Theta^2 = 0$.

Théorème de Cayley. — Cayley est arrivé autrement à la condition de fermeture par la remarque suivante : *pour que* $m\mathcal{T} \equiv 0$ *il faut et il suffit qu'il existe une fonction doublement périodique* $\Phi(u)$, *entière par rapport à* pu *et* $p'u$, *qui n'ait d'autres racines que la racine multiple d'ordre* m : $u = \mathcal{T}$.

En effet, toute fonction entière de pu et $p'u$ ne peut avoir d'autres pôles que $u \equiv 0$; la somme de ses pôles dans un même parallélogramme de périodes sera donc $\equiv 0$; par suite, il en sera de même de la somme de ses racines, de sorte que si elles sont toutes égales à $\mathcal{T}$ et en nombre m, on devra avoir $m\mathcal{T} \equiv 0$; réciproquement, cela suffit pour qu'on puisse construire cette fonction par la formule de la décomposition en produit, sous la forme :

$$\Phi(u) = A\,\frac{[\sigma(u-\mathcal{T})]^m}{\sigma(u-m\mathcal{T})(\sigma u)^{m-1}} \quad (\text{A, constante arbitraire}).$$

Pour appliquer ici ce théorème je remarque que je puis écrire $\Phi(u)$ sous la forme $F(pu) + p'u\,F_1(pu)$, en désignant par F et F_1 des polynômes entiers en pu ; on choisira aisément les degrés de F et de F_1 suivant la parité de m, de façon que $u = 0$ soit pôle multiple d'ordre m de la fonction : dans tous les cas, on trouve que le nombre total des coefficients de F et F_1 est m. Prenons pour variable $\rho = pu$; il faut et il suffit qu'on puisse choisir les coefficients de F et de F_1, de sorte que la fonction $F(\rho) + F_1(\rho)\sqrt{4\rho^3 - g^2\rho - g_3}$ admette la racine $\rho = p\mathcal{T}$ à l'ordre de multiplicité m. Je fais alors la substitution linéaire : $\rho = p\mathcal{T} + \frac{\lambda}{4}$, λ étant la nouvelle variable.

La fonction deviendra :

$$E(\lambda) + E_1(\lambda)\sqrt{4\left(p\mathcal{T} + \frac{\lambda}{4}\right)^3 - g_2\left(p\mathcal{T} + \frac{\lambda}{4}\right) - g_3}$$

E et E_1 étant entiers en λ et respectivement des degrés de F et F_1. On reconnaît alors sous le radical précisément le premier membre de l'équation discriminante du faisceau $\Gamma + \lambda C = 0$, pris sous la

forme réduite : on peut le remplacer par le premier membre $\Delta(\lambda) = \Delta_1 + \Theta_1 \lambda + \Theta\lambda^2 + \Delta\lambda^3$. On développera alors $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ suivant les puissances entières croissantes de λ ; et on égalera à o les m premiers coefficients du développement de $E(\lambda) + E_1(\lambda)\sqrt{\Delta(\lambda)}$ qui en résulte, ce qui donnera m relations linéaires et homogènes entre les coefficients des polynômes E et E_1 : l'annulation de leur déterminant donnera la condition cherchée sous la forme indiquée par Salmon (sections coniques, p. 584).

M. Lelieuvre (Caen).

DÉFINITION ET DÉTERMINATION ANALYTIQUE

DES FOYERS D'UNE CONIQUE

PRÉLIMINAIRES

Pour plus de clarté nous avons divisé cet article en deux parties. Dans la première, nous étudions au point de vue de l'enseignement les diverses définitions qui ont été employées pour désigner les foyers d'une conique. A ces définitions, nous en avons ajouté une nouvelle, qui nous semble destinée à être utilisée dans l'enseignement.

Dans la deuxième partie nous montrons comment cette nouvelle définition conduit *naturellement* à un procédé de détermination des foyers d'une conique, procédé bien plus élégant et plus commode que les procédés connus. Nous y avons présenté nos résultats sous une forme condensée en laissant de côté tous les calculs que le lecteur peut facilement effectuer lui-même. Afin de ne pas trop étendre notre travail, nous n'avons indiqué ce procédé de détermination que dans le cas où la conique est rapportée à des axes coordonnés rectangulaires ; la méthode est d'ailleurs la même dans le cas d'axes obliques.

Ce procédé possède un certain intérêt au point des résultats ;