DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE DE LA FORMULE DE TAYLOR

Autor(en): **Hatzidakis, J. N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3583

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \log\lambda = 0{,}48502$$

$$\operatorname{sh} a = -\frac{3}{\lambda}, \log(-\operatorname{sh} a) = \underline{1}{,}99210, \quad a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \quad \log\operatorname{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \bar{1}{,}46772, \quad \log\operatorname{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \bar{1}{,}95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log\operatorname{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\,i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.

2. Considérons d'abord la différence

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)\equiv\Gamma$$

entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle. Si, dans l'expression

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)-\Gamma,$$

nous remplaçons ε par une variable ω et que nous multipliions Γ par $\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2$, nous aurons la fonction suivante de ω

$$\sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x)-\Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

qui, par la manière même dont elle a été construite, s'annule pour $\omega=0$ et $\omega=\varepsilon$; sa dérivée

$$\sigma'(x+\omega)-\sigma'(x)-2\Gamma\frac{\omega}{\varepsilon^2}$$

s'annule donc pour une valeur ε_1 de ω $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais, comme elle s'annule aussi pour $\omega=0$, sa dérivée

$$\sigma''(x+\omega)-2\Gamma\frac{1}{\varepsilon^2}$$

s'annulera, elle aussi, pour une valeur ε_2 de ω $(0<\varepsilon^2<\varepsilon_1)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Gamma=\frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2),$$

d'où

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2).$$

3. Considérons maintenant, en général, la différence

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x)-\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)-\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)\equiv\Gamma.$$

Nous pouvons, de la même manière qu'auparavant, former la fonction suivante de ω

$$(1)\quad \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\frac{\omega}{1!}\sigma'(x)-\frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x)-\ldots-\frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)-\Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}},$$

dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre $r+1$ sont les suivantes

$$\sigma'(x+\omega)-\sigma'(x)-\frac{\omega}{1!}\sigma''(x)-\frac{\omega^2}{2!}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,\omega^r\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma''(x+\omega)-\sigma''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,r\omega^{r-1}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma'''(x+\omega)-\sigma'''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma''''(x)-\ldots-(r+1)\,r(r-1)\,\omega^{r-2}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{(r)}(x+\omega)-\sigma^{(r)}(x)-2.3\ldots r\,(r+1)\,\omega\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma^{(r+1)}(x+\omega)-\sigma^{(r+1)}x-1.2\ldots r\,(r+1)\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}}.$$

Ces dérivées s'annulent toutes (excepté la dernière) pour $\omega=0$ et, comme la fonction (1) s'annule pour les deux valeurs de ω : $\omega=0$, $\omega=\varepsilon$, sa dérivée première s'annulera pour $\omega=\varepsilon_1$ $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde de (1), s'annulera pour $\omega=\varepsilon_2$ $(0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$; or, elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée (ou bien la dérivée troisième de (1)) doit s'annuler pour $\omega=\varepsilon_3$ $(0<\varepsilon_3<\varepsilon_2)$, et ainsi de suite; la dernière dérivée (celle de l'ordre $r+1$) s'annulera pour $\omega=\varepsilon_{r+1}$ $(0<\varepsilon_{1+r}<\varepsilon_r<\ldots\ldots<\varepsilon_1)$. On a donc :

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^{r+1}}{(r+1)!}\sigma^{(r+1)}(x+\rho)\,;\quad(0<\rho<\varepsilon).$$

c. q. f. d.

J. N. Hatzidakis (Athènes).

Traduit en français par N.-J. Hatzidakis (Berlin).