CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

Autor(en): **Frolov, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3561

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

superficie dei corpi conduttori. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* Roma, 1877. — Sull'attrazione d'un anello circolare od ellittico. *Ibid.* 1880. — Un precursore italiano di Legendre e di Lobatchewsky. *Ibid.* 1839. — Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica. *Ibid.* — Sull'espressione analitica del principio di Huygens. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei,* 1° sem. 1892. — Osservazioni su una Nota del prof. Morera. *Ibid.* — Sui potenziali termodinamici. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei,* 1° sem. 1895. — Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens. *R. Accademia dei Lincei,* 2° sem. 1895. — Sul teorema di Kirchhoff. *Ibid.* — A proposito di una nuova ricerca del Prof. C. Neumann. *Ibid.* — Commemorazione di F. Brioschi. *Ibid.* (Rendiconto dell'adunanza solenne del 12 giugno 1897). — Note fisico-matematiche. *Atti del Circolo Matematico di Palermo,* 1889. — Sulla funzione potenziale della circonferenza. *Ibid.* — Sulla teoria generale delle onde piane. *Ibid.* 1891. — Sur la déformation d'un milieu continu. *Comptes rendus dell'Accademia delle science di Parigi,* 1889. — Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. *Ibid.* 1890. — Enrico Betti (commemorazione). *Ibid.* 1892 — Discorso sulla vita e sulle opere di Domenico Chelini. *Collectanea Mathematica.* Milano, Hoepli, 1881. — Sulla teoria degli assi di rotazione. *Ibid.* — Sur la courbure de quelques lignes singulières. *Nouvelles Annales de Mathématiques di Parigi,* 1864. — Zur Theorie des Krummungsmaasses. *Mathematische Annalen di Lipsia,* 1869. — Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici. *Nuovo Cimento,* Pisa, 1872. — Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. *Bulletin de Darboux,* Parigi 1876. — Sulle funzioni cilindriche. *Atti della R. Accademia di Torino,* 1881. — Sur les couches de niveau électromagnétiques. *Acta mathematica di Stoccolma,* 1883.

CONSIDÉRATIONS
SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

La Géométrie non euclidienne, créée par Gauss et ses collaborateurs Lobatschevsky et Bolyaï, et qui, selon l'illustre M. J. Bertrand, n'a eu, il y a trente ans, aucun disciple sérieusement convaincu, est très en vogue de nos jours. Elle compte, parmi ses partisans, des membres des académies des sciences et des professeurs des universités et des collèges. On s'en sert pour intégrer des équations différentielles; on espère même résoudre le problème des trois corps, en l'envisageant dans son domaine.

Des centaines d'écrits sont publiés par ses adeptes, dans le but de développer et de propager cette doctrine, dont le trait le plus caractéristique est la plus complète confusion des lignes droites et des lignes courbes, de sorte qu'on y perd facilement toute notion de la ligne droite, sans laquelle l'étude de la Géométrie devient illusoire. Autant vaudrait étudier la musique sans avoir d'oreille. Ce n'est pas tout : on invoque la Géométrie des êtres sans épaisseur et de ceux qui habitent des sphères creuses. On présente des thèses de doctorat sur cette doctrine. On distribue des prix d'encouragement et des mentions honorables pour des ouvrages qui contribuent à son perfectionnement. Enfin, on lui attribue *une grande portée philosophique, car*, selon ses adeptes, *en montrant l'inanité des idées de Kant sur l'espace, elle a ruiné, par la base, la métaphysique du criticisme* [1].

Ce sont des symptômes très inquiétants, qui font craindre que cette doctrine ne tardera pas à conquérir une place dans l'enseignement, d'autant plus qu'elle a déjà pénétré dans quelques traités de Géométrie. On a beau affirmer que les néogéomètres n'ont d'autre objet que de s'exercer à des analyses mathématiques sur des hypothèses variées. Il semble que les hypothèses ne devraient jamais être admises en mathématiques et qu'il est urgent que les revues spéciales, consacrées à l'enseignement mathématique, s'occupent de la question importante qui se résume en une évidente alternative : la Géométrie non euclidienne est-elle vraie ou fausse ?

Désirant contribuer à l'éclaircissement de cette question, nous exposerons dans cet article quelques remarques sur la Géométrie non euclidienne. Des partisans de cette doctrine, si pleins d'artifices, ne manqueront pas de faire leurs objections.

1. La Géométrie non euclidienne est une doctrine toute hypothétique, reposant sur la négation de l'axiome XI ou du postulatum d'Euclide, qui fut, avec raison, considéré pendant plus de vingt siècles comme une vérité évidente, confirmée par tous les faits physiques.

Cette hypothèse, que rien ne justifie, conduisit immédiatement

---

[1] MATHESIS. Octobre 1896, *Métagéométrie*, de M. Mansion, p. 41.

à un enchaînement continu de paradoxes qui a paru à ses inventeurs ne contenir en lui aucune contradiction. On a cru avoir découvert une doctrine merveilleuse, appelée à changer la face de la Mathématique et à verser sur elle des flots abondants de lumière.

Ses partisans s'empressèrent aussitôt de la rendre inattaquable, en multipliant les preuves pour établir : 1° que quelque loin que l'on pousse les conséquences de l'hypothèse admise, on ne se heurtera jamais à rien de contradictoire, et 2° que le postulatum d'Euclide est indémontrable. Au contraire, les mathématiciens de profession paraissent n'avoir rien fait pour défendre la Géométrie d'Euclide et d'Archimède de l'invasion de cette doctrine subversive renversant tous les faits géométriques du monde physique. On ne peut signaler dans cette voie que les Mémoires du général de Commines de Marsilly, insérés dans les Comptes rendus, de 1888 et 1889, de l'Association française pour l'avancement des sciences, dans lesquels il réfute les arguments des non euclidiens, qui n'ont pas pu répondre à ses objections.

2. L'hypothèse, admise par les non-euclidiens, ne s'impose pas nécessairement quand on rejette le postulatum d'Euclide. Elle n'est pas l'opposée de celui-ci et n'est pas la seule sur laquelle on puisse baser une Géométrie quelconque, quand on admet la possibilité d'un nombre arbitraire de Géométries différentes. Ainsi, pour établir la Géométrie qui porte le nom de Riemann et qui n'est autre chose que la Géométrie sphérique, on est parti de l'hypothèse opposée à celle de Gauss.

On a récemment affirmé qu'il est possible de fonder une Géométrie, dans laquelle *une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même*. Enfin, Lobatschevsky reconnaissait lui-même que son hypothèse (la même que celle de Gauss) pourrait être remplacée par d'autres hypothèses, quand il disait qu'*on pourrait essayer de substituer à ses équations d'autres équations* [1].

3. Notons que l'hypothèse non euclidienne n'est ni motivée, ni absolue, car elle est sujette aux exceptions. En effet, considérons une droite quelconque TT′ (fig. 1) et une perpendiculaire

[1] *Œuvres*, *Pangéométrie*, p. 678.

AA′. Il est possible, selon cette hypothèse, de mener des différents points B, C, D.... pris sur TT′ des obliques BB′, CC′, DD′... qui soient *parallèles* ou, à proprement parler, *asymptotes* à la perpendiculaire AA′. Les angles ABB′, ACC′... qu'elles font avec

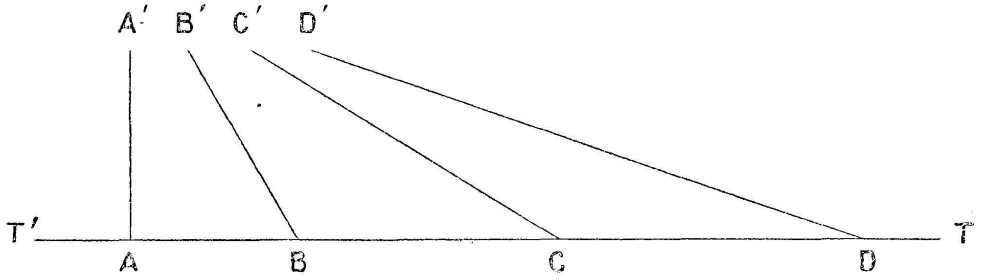

Fig. 1.

TT′, à mesure de leur éloignement de AA′, diminueront de plus en plus, et, si l'hypothèse était générale, en reculant l'asymptote à l'infini elle ferait avec TT′ un angle égal à zéro, c'est-à-dire, elle se confondrait avec celle-ci et, par suite, couperait la perpendiculaire AA′ en A. Donc, l'hypothèse présente une solution de continuité. Pour échapper à la contradiction, les non euclidiens sont obligés d'admettre que leur hypothèse n'a lieu que tant que l'angle fait par l'oblique et la droite TT′ n'est pas égal à zéro. Ils prétendent qu'alors l'oblique, au lieu de se confondre avec la droite TT′, se détache d'elle subitement pour devenir asymptote commune de AA′ et de TT′.

Gauss lui-même ne connaissait pas cet artifice, quand il expliquait à Schumacher, dans sa lettre du 12 juillet 1831, qu'à la limite, le triangle équilatéral ABC (fig. 2), dont on agrandit les côtés, se transforme en trois droites O*a*, O*b*, O*c* qui sont ses bissectrices. Ce sont ses adeptes, plus hardis sinon plus judicieux que lui, qui ont expliqué que le maître s'était trompé et que le triangle équilatéral se transforme, à la limite, non pas en ses bissectrices, mais en trois droites QR, ST, UV, asymptotes réciproques deux à deux. Cette correction devenait nécessaire, car il serait étrange d'admettre que les côtés du triangle rectiligne se brisent

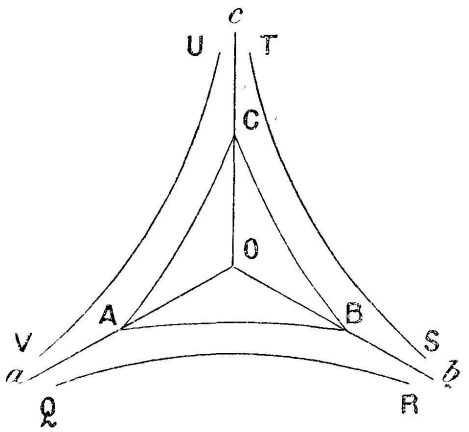

Fig. 2.

d'eux-mêmes. Mais une telle explication suppose une force occulte qui détache brusquement les côtés du triangle l'un de l'autre, car s'il est facile de concevoir des droites qui ne se rencontrent pas, il est difficile de comprendre ce qui empêcherait de joindre entre eux les points a, b, c pris sur les bissectrices du triangle équilatéral, aussi loin que l'on veut du centre O. La conception de Gauss semble plus claire que celle de ses disciples. Mais, au lieu de débrouiller cette confusion inutile, il vaut mieux reconnaître qu'avec l'agrandissement du triangle ses angles ne varient pas et que leur somme reste constante, ce qui revient à rejeter l'hypothèse et à accepter le postulatum d'Euclide.

4. Autrement, on se heurtera inévitablement à une foule de nouvelles contradictions, encore plus manifestes. En voici une que nous avons signalée l'année passée au Congrès de Boulogne-sur-Mer de l'Association française pour l'avancement des sciences, et nous la reproduirons en abrégé, sous une forme différente : Lobatschevsky établit dans le § 30 de ses *Recherches géométriques* la possibilité de triangles rectilignes, dont les trois perpendiculaires, élevées sur les milieux des côtés, que nous appellerons *perpendiculaires médianes*, sont asymptotes l'une à l'autre. C'est une conséquence immédiate de son hypothèse, exposée dans le § 16.

Pour simplifier, considérons un triangle isoscèle ABC (fig. 3) et supposons que ses trois perpendiculaires *médianes* Ee, Gg, Kk sont asymptotes entre elles.

Pour construire l'asymptote commune IJ, aux côtés AC et BC, il suffit de faire CN = CD = CF, car les biangles ACNI et BCNJ seront superposables aux biangles EDCK et GFCK, et, par conséquent, IJ sera asymptote à AC et à BC. On voit que l'angle C doit surpasser le double de la somme des angles A et B, car l'angle C est égal à la somme de quatre angles égaux DCL = LCN = FCM = MCN, dont chacun surpasse A et B. Il s'ensuit l'inégalité $C > 2(A+B) = 4A$.

Prenons sur Ee et sur Gg deux points symétriques D′ et F′, tels que les perpendiculaires D′C′ et F′C′ se coupent en C′ sous un angle moindre que toute grandeur assignée. Prolongeons-les, faisons A′D′ = C′D′, B′F′ = C′F′ et joignons A′ et B′. Nous aurons

le triangle isocèle A′B′C′. Enfin, menons par ses sommets A′ et B′ les droites A′A″ et B′B″, asymptotes aux trois perpendiculaires médianes. Si l'on recule encore les côtés A′C′ et B′C′ de ce triangle jusqu'aux points E′ et G′, l'angle C′ s'annulera et ces

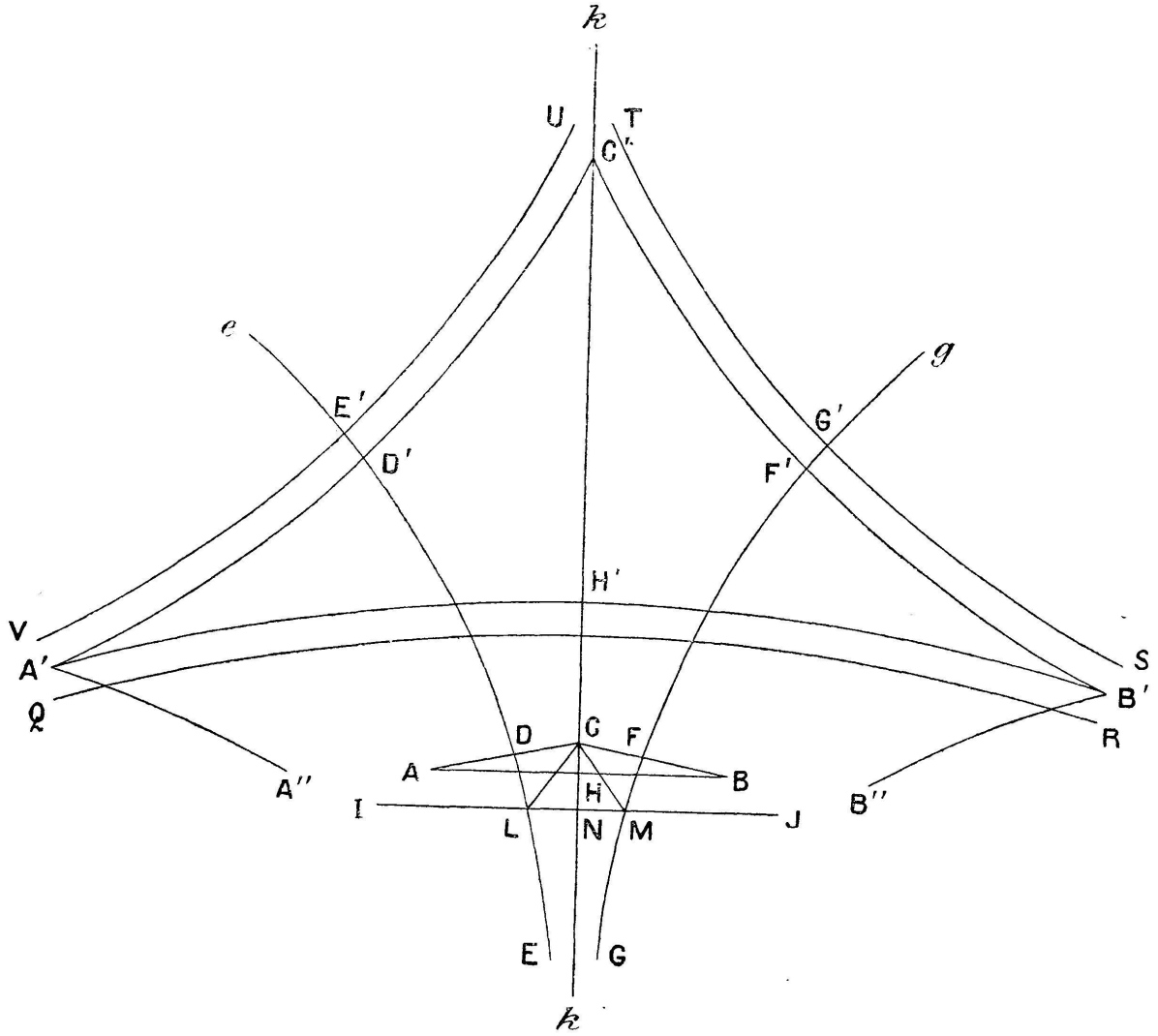

Fig. 3.

côtés se détacheront en C′ l'un de l'autre et deviendront asymptotes réciproques. Se détacheront-ils en même temps du côté A′B′? Si les points E′ et G′ doivent rester encore les milieux des côtés A′C′ et B′C′, il faut admettre que les angles A′ et B′ s'annuleront en même temps que C′ et que les trois côtés se transformeront simultanément en trois droites infinies QR, ST, UV, asymptotes l'une à l'autre. Mais rien n'empêche aussi d'admettre que les côtés A′C′ et B′C′ se détacheront seuls en C′ et que le triangle se transformera en un biangle, de sorte que les points E′ et G′ cesseront d'être les milieux des côtés, comme nous l'avons fait précédemment.

Supposons ici que le triangle se transforme en trois droites asymptotes QR, ST, UV. Remarquons que dans ce cas les droites $A'A''$ et $B'B''$, reculées à l'infini, se confondront avec la ligne QR et, par suite, deviendront sécantes des trois perpendiculaires médianes E*e*, G*g*, K*k*.

Il est évident que lors de cette transformation du triangle, par raison de la loi de continuité, ses trois angles, passeront successivement par des phases, où l'on aura d'abord $C' = 2(A' + B')$ et l'asymptote commune deviendra impossible ; on aura ensuite $C' = A' + B'$ et les perpendiculaires médianes se couperont en H', au milieu du côté $A'B'$, et enfin on aura $C' < A' + B'$, quand elles se rencontreront à l'intérieur du triangle. Ainsi ces perpendiculaires, supposées asymptotes réciproques, se couperont entre elles et seront en même temps asymptotes et sécantes.

C'est une contradiction évidente, qui a échappé aux inventeurs de la Géométrie non euclidienne. Nous montrerons qu'il y en a bien d'autres.

5. Nous présenterons maintenant une démonstration très simple et très directe de la *possibilité des droites équidistantes*, niée par les non-euclidiens, contrairement au témoignage de nos sens, et qui peut remplacer le postulatum d'Euclide, comme base de la théorie des parallèles. Dans un de nos opuscules nous avons montré que cette vérité évidente n'est qu'un corollaire du théorème du n° XVI du célèbre Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circà superficies curvas*, et nous avons conclu que c'est Gauss qui établit le premier la possibilité des droites équidistantes [1].

Considérons deux droites SS' et TT' (fig. 4), telles qu'en abaissant d'un point M, pris sur SS' une perpendiculaire MN sur TT', l'angle NMS soit aigu et NMS' obtus. On pourra alors du point N abaisser sur SS' la perpendiculaire NM_1, du point M_1 sur TT' la perpendiculaire M_1N_1 et ainsi de suite, de sorte qu'on obtiendra un réseau de perpendiculaires, dont chacune sera moindre que la précédente et qui évidemment augmenteront dans la direc-

---

[1] *Recherches sur la théorie des parallèles*, 1897. Paris, librairie scientifique de M. A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne.

tion inverse. Ces perpendiculaires, désignant les distances des points des deux droites, il s'ensuit que celles-ci s'approchent l'une de l'autre vers S et T, *du côté de l'angle aigu* NMS, et s'éloignent dans le sens opposé. Ce réseau ne se termine jamais et l'on pourra le continuer indéfiniment, même si les lignes SS′ et TT′ devenaient courbes. Mais on ne peut pas déterminer même approximativement les longueurs des segments MM_1, M_1M_2, M_2M_3... On sait seulement que le complément de l'angle aigu NMS a une grandeur finie et non infiniment petite, car autrement cet angle NMS deviendrait droit, et que, par conséquent, la portion MM_p de la droite SS′, le long de laquelle se développe le réseau des perpendiculaires, a aussi une longueur finie. Cela suffit pour le raisonnement qui va suivre.

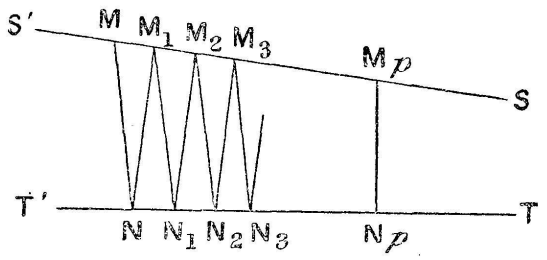

Fig. 4.

Considérons maintenant deux droites SS′ et UU′ (fig. 5) passant par l'extrémité B de la perpendiculaire AB élevée sur TT′, et supposons que les angles aigus ABS et ABU′ sont égaux. Nous savons déjà que les distances de BS et de AT diminuent de plus en plus *à partir de* AB vers S et T et que celles de BU et de AT augmentent de plus en plus dans le même sens. Il s'ensuit tout naturellement qu'il existe, entre les droites BS et BU, — dont la première fait avec AB un triangle aigu et la seconde un angle obtus, — une droite intermédiaire BV, dont les distances à AT ne subissent aucune variation et restent constantes. Comme l'angle ABV ne peut être ni aigu, ni obtus, il est droit et, par suite, BV est perpendiculaire à AB. Ainsi la droite BV est équidistante de AT, et l'*équidistance des droites* est prouvée géométriquement, uniquement au moyen des propriétés des perpendiculaires et des obliques, sans le secours d'aucune supposition arbitraire. Les non euclidiens auront de la peine à y trouver un postulat dissimulé quelconque.

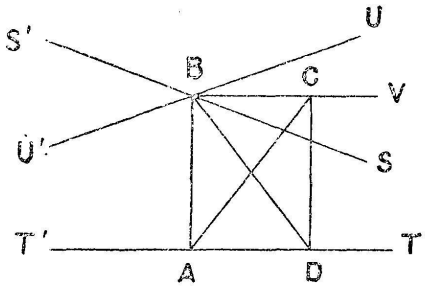

Fig. 5.

6. On prouvera immédiatement la possibilité des *rectangles*.

D'un point C (fig. 5), pris sur BV, abaissons sur AT la perpendiculaire CD et nous obtiendrons le quadrilatère ABCD, dont les côtés AB et CD sont égaux. Menons la diagonale AC et nous aurons deux triangles égaux : $\Delta ABC = \Delta ACD$, car AC est leur côté commun, $AB = CD$ et les angles en *B* et en D sont droits. Par suite $BC = AD$. Menons la diagonale BD et nous aurons encore deux triangles égaux : $\Delta ABD = \Delta BCD$, car les deux côtés de l'un d'eux sont égaux aux deux côtés correspondants de l'autre, et le troisième côté BD est commun. Par suite, l'angle en C, étant égal à l'angle en A, est droit. Il s'ensuit que le quadrilatère ABCD est un *rectangle*, car tous ses angles sont droits et ses côtés opposés sont égaux. On en conclura que la somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits et que le postulatum d'Euclide, qui a subi tant de persécutions injustes au XIXe siècle, est une vérité incontestable.

7. Ainsi toute la théorie des parallèles se trouve établie, sur une base solide, et l'on est débarrassé définitivement d'une hypothèse qui répugne au bon sens et exige *des figures qu'on ne sait pas construire* et qui ne sauraient exister non seulement en réalité, mais même dans l'imagination. Si l'analyse moderne ne distingue pas le réel de l'imaginaire, le possible de l'impossible, le vrai du faux, cette distinction aura toujours une grande importance en géométrie. On ferait bien de se rappeler que Lobatschevsky lui-même a reconnu que *la Géométrie non euclidienne ne peut avoir d'application que dans l'analyse, puisque*, selon lui, *les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle la moindre distinction de deux angles droits.*

On a donc le droit de souhaiter que cette doctrine paradoxale et contradictoire ne soit pas introduite dans l'enseignement, où elle pourrait fausser l'intelligence des élèves.

M. FROLOV (Genève).