BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

J. Riddel. — **Pratical plane and solid Geometry ;** un vol. in-8°, 327 p. ; prix : 2 s. ; Olivier and Boyd, Edinbourg 1899.

Le titre de ce petit livre reproduit textuellement celui d'une des branches du premier examen scientifique du *Science and Art Department*. Il n'y faut donc pas chercher autre chose que le développement de ce programme ; mais à ce titre il est intéressant pour tous ceux qui s'occupent de l'enseignement des éléments de la Géométrie, car il montre l'étendue du programme, et l'importance accordée en Angleterre aux exercices de construction à côté de l'étude de « l'Euclide », le livre classique des étudiants anglais.

L'enseignement de la Géométrie en effet ne doit pas avoir pour seul but de faire *comprendre* aux élèves un système logique, bien enchaîné, des vérités de cette science, tel que ceux qu'ont proposé Euclide, Petersen et tant d'autres. L'expérience prouve qu'en procédant ainsi on n'arrive pas à développer chez la moyenne des élèves cet *esprit géométrique* qui, en somme, à côté de quelques théorèmes fondamentaux, est le vrai bénéfice que l'on doive retirer de cette étude.

Il ne suffit pas non plus de *proposer* à la fin de chaque chapitre une série d'exercices ; il est nécessaire de mener l'élève par la main, pour ainsi dire, en lui *décrivant* en détail les constructions qui amènent la solution d'un problème, et en exigeant que ces constructions soient réellement *exécutées* sur le papier, et non pas « seulement avec la langue » selon la pittoresque expression de Steiner.

Ce n'est qu'après une longue série d'exercices de ce genre que l'étudiant prendra de l'intérêt à la chose, et deviendra le collaborateur du maître, au lieu d'en rester le perroquet ; il acquerra ce ton d'esprit particulier qui amène à savoir par quel bout il faut attaquer la difficulté, et prendre l'habitude si importante et si utile de faire devant chaque problème la revue de toutes les connaissances qu'il possède sur le sujet.

Dans une première partie de 139 pages, l'auteur résoud par le menu, avec figure à l'appui, 138 problèmes répartis en onze paragraphes.

I Points, lignes et angles. II Angles et triangles. III Suite du II. IV Polygones et figures semblables. V Proportions et aires. VI Suite du V. VII Lignes et cercles. VIII Polygones inscrits et circonscrits. IX Ellipse, parabole et hyperbole. X Échelles. XI Arithmétique graphique.

Chacun de ces paragraphes est précédé du rappel des définitions et suivi d'exercices sans solutions. Les théorèmes sont donnés, sans démonstrations.

La deuxième partie (135 pages) contient 114 problèmes de Géométrie dans

l'espace, traités en détail par la méthode des projections orthogonales. En voici le sommaire :

I. Projections de points, lignes et solides.
II. Projections auxiliaires et leur emploi.
III. Plans, sections planes des solides.
IV. Plans, lignes et points.
V. Suite du IV. VI Rabattements.

Enfin un appendice de 44 pages donne environ 200 questions posées aux examens.

A noter, comme disposition typographique, qu'en haut de chaque page, et isolé du contexte par un filet, se trouve rappelé soit un théorème important, soit une règle de construction.

Nous avons remarqué, page 157, une définition fausse : « Un parallélépipède est un solide qui a six surfaces, toutes rectangles » ; comme exemple, l'auteur cite une boîte.

E. Steinmann (Genève).

A.-J. Pressland and Ch. Tweedie. — **Elementary Trigonometry ;** un vol. in-8°, 313 p. ; prix : 2 s. 6 d. ; Oliver and Boyd, Edinbourg, 1899.

Ce manuel de *Trigonométrie plane* contient l'ensemble des matières généralement traitées dans les ouvrages classiques. Il comprend deux parties. Dans la première viennent d'abord les définitions et les propriétés des rapports trigonométriques avec le théorème de l'addition et ses conséquences. Les auteurs ont adopté la méthode analytique basée sur la notion de projection généralement en usage dans les manuels français. Toutefois leur traité offre sur la plupart de ces derniers un sérieux avantage au point de vue pédagogique ; les fonctions trigonométriques sont définies comme *rapports* et non comme *lignes* (!) ainsi qu'on le retrouve encore même dans les ouvrages les plus récents (1).

La première partie contient en outre les chapitres relatifs à la construction des tables trigonométriques, et aux logarithmes ; puis viennent les applications à la Géométrie du triangle et à la mesure des hauteurs et des distances.

La seconde partie, d'un caractère plutôt algébrique, est consacrée au problème de l'inversion, aux équations trigonométriques, aux notions élémentaires sur la théorie trigonométrique des imaginaires, et à la sommation de quelques séries trigonométriques.

Ces diverses notions sont présentées avec beaucoup de clarté et une grande simplicité dans la méthode. Ajoutons, pour terminer, que les auteurs ont eu soin d'accompagner chaque chapitre d'un grand nombre d'exercices et de problèmes fort bien gradués.

H. Fehr.

(1) La dénomination de *lignes trigonométriques* ne peut que fausser l'intelligence du sujet. Elle devrait être entièrement abandonnée. Les mots de *rapports* ou de *fonctions* trigonométriques sont suffisants.

Mme Clémence Royer. — **La constitution du monde. Dynamique des atomes.** — *Nouveaux principes de philosophie naturelle.* 1 vol. in-8°, 798 p., illustré de 29 fig. dans le texte et de 4 planches hors texte; prix, 15 fr. ; Paris, Schleicher frères, 1900.

L'œuvre de Mme Clémence Royer est d'ampleur très large. C'est le fruit de longues et persévérantes méditations.

L'auteur ne se fait nul besoin, pour établir ses conclusions, ni du Calcul intégral, ni des autres formes de l'analyse Géométrique. Son argumentation a pour base les axiomes de la Géométrie élémentaire.

Après une préface d'une haute philosophie et une introduction où la richesse de l'érudition seconde admirablement un esprit de critique fort délié, *La Constitution du Monde* comprend huit parties distinctes.

L'étude des *faits-principes* occupe la première; celles des *phénomènes vibratoires*, des *corps solides*, des *corps liquides et gazeux*, du *processus vital*, de *la pesanteur*, de la *théorie des marées*, celle, enfin, de l'*évolution des mondes*, sont le sujet des sept autres.

En ces courtes lignes, ce n'est pas une analyse approfondie que nous pouvons avoir la prétention de faire des différentes thèses successivement soutenues par l'auteur. C'est simplement un rapide aperçu que nous nous proposons d'en donner.

Mme Clémence Royer bat en brèche beaucoup d'hypothèses en cours, et sur des problèmes plus ou moins obscurs et dont la solution est encore douteuse, elle propose des interprétations dont la vraisemblance le dispute à la nouveauté.

Dans la série des graves questions qui ont été l'objet de son étude, faisons choix des points fondamentaux, et opposons aux idéas communément reçues les conclusions auxquelles ses patientes recherches l'ont conduite. Mieux que de longues discussions, un semblable parallèle sera propre à mettre en relief le cachet d'originalité de l'ouvrage.

La masse est, en général, considérée comme la mesure de la matière. La matière de l'atome serait donc considérée comme égale à sa masse et comme proportionnelle à son volume. Il s'en suivrait que la densité serait constante.

Pour Mme Clémence Royer, la masse est distincte de la matière considérée comme *substratum* du volume.

La matière — *substratum* de l'Atome — est inversement proportionnelle au cube de sa masse. Sa densité de masse est variable. Sa densité de substratum est constante sous les mêmes pressions et toutes choses égales d'ailleurs.

D'après les physiciens mécanistes, la matière est passive et inerte. Les forces qui la meuvent lui sont attelées comme des chevaux à un carrosse.

Selon l'auteur, la matière est active. Elle est le *substratum* de la force, ou l'agent dont la force est l'acte.

L'atome passe pour solide et de figure inaltérable. Les atomes solides et figurés s'agitent dans le vide.

L'atome, au sens de Mme Clémence Royer, est fluide et expansible. Il cherche à réaliser une sphère.

Les atomes se limitant les uns les autres par leur compression mutuelle,

ils ne réalisent que des polyèdres qui remplissent totalement l'espace. Le vide absolu n'existe pas.

On suppose que la vibration thermique est produite par l'oscillation des atomes dans le vide.

Pour Mme Clémence Royer, elle résulte des vibrations aternantes des ménisques sphériques que les atomes s'enlèvent mutuellement par la compression de leurs sphères virtuelles en polyèdres.

Nos théories actuelles sur la lumière tendent à expliquer sa transmission à travers les milieux diaphanes; mais n'abordent pas même le problème de l'état lumineux initial.

Selon Mme Cl. Royer, la vibration thermique devient lumineuse à partir du moment où la compression des atomes est asymétrique.

Elle rend compte, ainsi, du phénomène de la couleur, resté si mystérieux pour nos physiciens qu'ils en sont réduits à en supposer la subjectivité.

En réalité, le polyèdre atomique étant aplati suivant un de ses axes relativement à l'autre, les faces élargies qui subissent la compression *maximum* se colorent dans la gamme chaude, du blanc au noir par le jaune et le rouge; tandis que les faces rétrécies qui subissent la compression *minimum*, se colorent des nuances de la gamme froide du blanc au noir par le bleu et l'indigo.

Dans leur transmission à travers les corps diaphanes, la réunion de ces deux faisceaux de rayons donne le prisme complet, et par leur convergence donne de la lumière blanche.

La vibration sonore que l'on suppose se produire dans l'éther intermoléculaire, est au contraire pour Mme Clémence Royer, le produit des compressions et dilatations alternatives des molécules pesantes suivant leurs deux axes perpendiculaires de symétrie. C'est pourquoi elle n'existe pas dans l'éther pur dont les atomes ne sont pas groupés en molécules.

Quant à la nature des odeurs et des saveurs, attribuées jusqu'ici à des mouvements vibratoires sur le mécanisme desquels on n'est pas fixé, Mme Cl. Royer les considère comme l'effet des vibrations des plans de contact intermoléculaires, résultant des mouvements de rotation des molécules.

Pour la cellule organique, sur la genèse de laquelle on ne sait rien, selon l'auteur elle se constituerait autour d'une molécule gazeuse d'azote par la transformation d'atomes d'éther en atomes pesants, de sorte que la vie serait productrice de matière pesante.

A l'égard du grand problème de la gravitation, Mme Cl. Royer donne de la formule de Newton une traduction analytique démontrant que l'apparente attraction des masses est le résultat de causes thermiques.

Elle présente une nouvelle théorie des marées qui, faisant intervenir la déformation du noyau liquide de la terre, se trouve plus conforme aux faits observés dans l'établissement des ports.

Il résulte, enfin, de la théorie mécanique de la chaleur, telle qu'elle est sortie des travaux des Clausius et des Maxwell, que le monde devrait finir par le froid dans l'absolue immobilité.

D'après l'auteur de *La Constitution du Monde*, la température des corps sidéraux étant proportionnelle à leur masse et ces corps grossissant sans cesse par la chute de masses nouvelles, leur température s'élève progressivement au lieu de s'abaisser.

Toutes les planètes seraient, ainsi, condamnées à tomber dans leur soleil, suivant une courbe hélicoïdale, et chaque soleil, s'échauffant de plus en plus, finirait par passer à l'état gazeux et devenir une nébuleuse destinée à reproduire d'autres systèmes.

Qui contestera la haute portée philosophique d'une telle œuvre ?

Les principes philosophiques de l'auteur s'affirment, du reste, en toute indépendance, dès les premières pages de sa préface.

Des lois logiques de l'entendement humain et de l'ensemble si rapidement croissant de nos connaissances, Mme Clémence Royer conclut qu' « il n'y a rien d'inconnaissable pour la raison que ce qui n'existe pas ; et rien d'incompréhensible que la contradiction qui est l'impossible.

« Ce qui n'a pas d'existence, ajoute-t-elle, ne peut être objet de science. Ce que la science ne saura jamais, ce sont toutes les folles visions de l'imagination humaine cherchant à se représenter ce qu'elle ne sait pas encore ; ce sont les rêves fantastiques du sommeil pris, durant le jour, pour des réalités ; ce sont toutes les erreurs enfantées par le mensonge exploiteur de la crédulité. »

L'énervante et stérilisante doctrine de « l'inconnaissable » n'est à ses yeux rien de plus qu'une hypocrite et trompeuse tactique pour faire croire à l'infirmité radicale et à l'impuissance de la raison. « La certitude et l'évidence des relations mathématiques, voilà, dit-elle, la grande pierre d'achoppement des vieux dogmes. »

L'impatience des lisières dont certains prétendent entraver l'essor de l'intellect humain éclate. « D'où viennent, s'écrie-t-elle, ces doutes qu'on entretient sur sa puissance ? Pourquoi serait-il condamné à ne jamais appréhender et connaître la nature des choses et l'enchaînement de leurs causes jusqu'à la cause perpétuelle et permanente qui est leur *substratum* ? »

Et combien altière est sa réplique : « Chacun des progrès de la science la simplifie en classant les faits sous des lois de plus en plus larges. N'y a-t-il pas lieu de croire que la loi de ces lois, celle qui sera leur principe commun, sera aussi la simplification suprême de la science, puisqu'elle montrera tous les faits se déduisant d'un fait premier universel, évident comme un axiome ? »

Si l'auteur de *La Constitution du Monde* n'a nullement la prétention d'avoir dit le dernier mot de tous les problèmes soulevés dans son ouvrage, il lui est légitimement permis d'espérer qu'il contribuera à faire progresser la science. Ce sont autant de jalons plantés sur une route nouvelle et destinés à servir de guide aux chercheurs.

Bref, l'œuvre de Mme Clémence Royer se lira, se méditera et nous ne sommes au bout ni des polémiques qu'elle suscitera, ni des idées neuves qu'elle fera naître.

Dr Collineau (Paris).

D. Cecilio Jimenez Rueda. — **Tratado de las formas geometricas de 2e catégorie.**

M. Jimenez Rueda, professeur à l'Université de Valence, en s'inspirant surtout de la méthode de Staudt, a publié en 1898 la première partie de son ouvrage, qui contient indistinctement des propositions de Géométrie

plane et de l'espace, de Géométrie élémentaire et projective ; il emploie aussi quelquefois comme instrument utile le rapport anharmonique et en outre il introduit quelques concepts de la Géométrie du triangle et des notions sur les Géométries non-euclidiennes de Lobatschewsky et Riemann.

Le deuxième fascicule, paru récemment, présente encore plus d'intérêt. Son objet est : « les coniques et surfaces du deuxième ordre ». Sans abandonner la prédominance de la méthode de Staudt, l'auteur emploie les relations métriques quand cela facilite l'exposition : les nombreuses figures donnent de la clarté au texte. Il faut remarquer le dernier chapitre qui contient des notions sur les lignes planes et les surfaces coniques d'ordres supérieurs.

R. Böger. — **Ebene Geometrie der Lage ;** un vol. in-8°, 289 p. : prix : 5 Marks ; t. VII de la *Collection Schubert* : Goeschen, Leipzig, 1900.

Rien ne saurait mieux confirmer les progrès réalisés par la pensée mathématique dans les domaines les plus divers que la publication de collections populaires d'œuvres mathématiques. La Maison Goeschen à Leipzig fait paraître actuellement deux collections de cette nature. L'une embrassera, entr'autres, les mathématiques, et comprendra, sous forme d'*abrégés*, une série de petits volumes vendus à un prix très modique (1 fr. le vol. relié). L'autre, dirigée par M. le professeur H. Schubert, se composera d'uae série de *traités* établis sur des bases scientifiques tout en tenant compte des besoins de la pratique ; chaque volume sera rédigé de manière à pouvoir être consulté par les personnes non encore initiées à la branche traitée. Le présent ouvrage fait partie de cette dernière collection. Il est principalement consacré à la *théorie des Coniques*. Dans la première partie les coniques sont envisagées comme engendrées par une ponctuelle ou par un faisceau de rayon ; dans la seconde on les considère comme directrices (Ordnungscurve) d'un système polaire.

L'auteur a publié autrefois un mémoire (Ueber Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen, Hambourg, 1886) ayant pour objet la suppression de l'imaginaire en géométrie de position. A cet effet il généralise la notion employée par V. Standt sous la dénomination de *Wurf*. A quatre points ABCD il fait correspondre de trois manières différentes trois couples de points. Deux de ces couples constituent ce qu'il appelle un *Wurf*. Il y a trois cas possibles : AB.CD : AC.BD et AD.BC. Dans le second cas les couples sont séparés, c'est le système *elliptique* : les deux autres systèmes AB.CD et AD.BC sont dits *hyperboliques*. On sait que deux couples de points déterminent une involution : on distingue d'ordinaire le cas elliptique du cas hyperbolique. La notion d'éléments doubles conduit alors aux imaginaires : dans le cas d'une involution elliptique les éléments doubles sont imaginaires : ils sont réels dans le cas d'une involution hyperbolique. M. Böger fait la distinction, dès le début, dans la définition du *Wurf* : il ne parle des éléments doubles que dans le cas d'une involution hyperbolique et parvient ainsi à évlter l'introduction des imaginaires. L'auteur estime que cette notion n'est pas seulement inutile mais qu'elle est même nuisible. Etant donné qu'elle ne répond à aucune conception réelle, elle a pour effet d'obscurcir le sujet. Nous ne pouvons pas nous rallier à cette manière de voir. L'imaginaire repose sur une définition à l'aide de laquelle on opère

en géométrie comme avec les autres définis. Elle permet de faire une distinction très précise entre ce qui est concevable et ce qui ne l'est pas ; aussi apporte-t-elle de l'ordre dans la théorie sans l'obscurcir. Les théorèmes prennent une forme plus générale et peuvent être énoncés d'une manière beaucoup plus simple. Selon nous la notion des imaginaires ne doit pas être écartée des manuels ; c'est d'ailleurs l'opinion de V. Standt et de Reye : et nous ne croyons pas que par l'absence de la notion des imaginaires le livre de M. Böger ait atteint une plus grande clarté dans l'exposé.

L'auteur écarte également tout calcul et tout moyen auxiliaire emprunté à la planimétrie. « Mais, puisque l'exercice et l'étude relative à l'égalité et au parallélisme sont d'un grand secours : fournissent d'important notre faculté de conception des choses, » les conséquences planimétriques ont été traités dans des paragraphes marqués d'un astérisque. Cependant dans d'autres ouvrages, par exemple dans celui de Reye, les relations métriques sont examinées d'une manière très approfondie, et nous ne croyons pas que ces auteurs n'aient fait que suivre une mauvaise habitude. Il nous semble au contraire que cela tient à ce que ces considérations spéciales sont à la fois intéressantes et utiles. Tous ceux qui appliquent la géométrie de position au dessin savent qu'en général les constructions nécessitent les relations métriques qui dans l'ouvrage de M. Böger n'occupent qu'une place tout à fait secondaire.

Nous venons d'indiquer les points essentiels par lesquels cet ouvrage s'écarte des traités classiques (V. Standt et Reye). Dans leur ensemble les matières traitées sont celles que l'on trouve dans le premier volume de la géométrie de Reye. Quant à l'ordre adopté, M, Böger débute par les *figures perspectives* (homologiques). En procédant ainsi il donne satisfaction à tous ceux qui étudient cette branche dans ses relations avec la géométrie descriptive. A la perspectivité (homologie) se rattachent les figures harmoniques : viennent ensuite la projectivité (homographie), l'involution, les sections coniques, et les théorèmes de Pascal et de Brianchon. Puis l'auteur examine les propriétés projectives et involutoires des coniques et la théorie des pôles polaires. Les chapitres relatifs aux diamètres, aux foyers et au cercle de courbure donnent lieu à quelques considérations sur les relations métriques.

La seconde partie traite de la collinéation, de la réciprocité et des systèmes réciproques de plans en involution. Ces systèmes que l'auteur désigne sous le nom de champ polaire (*Potarfeld*) ; font l'objet d'une étude très approfondie ; la conique joue le rôle de directrice (*Ordnungseurve*). A ces développements viennent se rattacher les considérations relatives au faisceau de champs polaires, et en particulier à deux champs polaires. D'autre part l'auteur étudie une certaine correspondance entre une ponctuelle et une série de points sur une conique ; il lui donne le nom d'involution du 3e ordre. Il examine enfin la construction la plus générale d'une conique à l'aide de cinq involutions ; il y parvient en envisageant chaque couple d'une involution polaire comme éléments doubles d'une nouvelle involution dite l'involution adjointe.

Les dénominations que l'on rencontre dans cet ouvrage s'écartent souvent des termes bien choisis que l'on emploie depuis longtemps en géométrie de position. On y trouve en outre beaucoup de définitions et d'expressions nouvelles qui pourraient avoir leur place dans un mémoire mais qui sem-

blent déplacées dans un manuel tel que celui-ci. Il en résulte que les questions d'un intérêt général ne prennent pas une forme plus simple que dans d'autres ouvrages. Nous croyons donc que cet ouvrage, écrit d'ailleurs sous une forme très claire, trouvera meilleur accueil dans les milieux scientifiques que chez les praticiens auxquels il était spécialement destiné.

Dr Christian Beyel (Zurich).

José Echegaray. — **Lecciones sobre resolucion de ecuaciones y teoria de ecuaciones.** Madrid, 1899.

L'apparition, chez nous, d'un ouvrage consacré à la théorie de Galois sur les équations peut être considérée comme un événement.

Dans l'enseignement de l'Algèbre nous sommes encore obstinés à suivre, presque sans y rien ajouter de nouveau, les doctrines classiques qui se terminent au célèbre théorème de Sturm ou au non moins célèbre théorème de Cauchy, si fondamental aujourd'hui dans les cours modernes d'Analyse.

M. Echegaray, en publiant ses remarquables leçons données à l'Athénée de Madrid, a donné un coup de bélier à notre routine invétérée qui résiste avec entêtement, dans nos établissements d'enseignement, à l'introduction des concepts combinatoires, presque restreints à présent à la théorie des déterminants et à quelques ébauches sur la théorie des congruences : nous ne nous inquiétons pas de la prépondérance des concepts d'ordre et de combinaison dans toutes les branches de la Mathématique.

M. Echegaray commence son exposition en montrant l'enchaînement des questions qui présentent de jour en jour une plus grande amplitude et exigent de nouveaux algorithmes pour aboutir aux solutions.

« Parler de la résolution des équations, dit-il, c'est parler de l'*infini*, parce qu'il existe des classes infinies d'équations, et nous ne pouvons en résoudre qu'un très petit nombre : il faut, pour le voir, combiner sous le signe d'une intégrale définie tous les signes algébriques qui nous sont connus. »

En passant de l'équation implicite à l'équation explicite, on augmente le *degré de sa transcendance ;* nous nous élevons ainsi, depuis les fractions, les quantités négatives, imaginaires, jusqu'aux fonctions elliptiques, etc.

Conduit au calcul symbolique, il donne une très élégante démonstration géométrique du principe fondamental des équations, et il établit d'abord les rapports entre les fonctions symétriques des racines d'une équation et ses coefficients, En présence de l'impossibilité de suivre une méthode synthétique, et à défaut d'une méthode générale, il poursuit la méthode analytique, se servant des exemples des équations des quatre premiers degrés, dans le but d'offrir une ébauche de ce que serait la méthode générale : il apprend à trouver la *résolvante*, et développe la théorie des substitutions, l'obtention de l'inconnue au moyen de la multiplication : la représentation analytique des substitutions est mise en lumière par de nombreux exemples, ainsi que l'étude des transpositions et des cycles, qui est rendue intuitive à l'aide de représentations graphiques ingénieuses, où l'on emploie des transversales comprises entre des parallèles : il fait voir que pour chaque cycle, la *transversale du produit est la résultante du produit des facteurs*, pour obtenir la substitution transformée par une autre. L'emploi du tableau que M. Echegaray appelle *de Cauchy*, et sa représentation symbolique, facilitent la

démonstration du théorème de Lagrange sur l'expression rationnelle d'une fonction par une autre quand son groupe contient le groupe de celle-ci, et l'étude successive des cas de la fonction symétrique d'une seule valeur, de celle qui en a 1, 2... *n*, de la fonction alterne, et de celle des trois valeurs, montre combien M. Echeragay prend de précautions pour dérober au commençant la difficulté des généralisations, par la décomposition graduelle des questions.

L'étude des *domaines* de rationalité dont l'amplification s'obtient à l'aide des quantités adjointes, qui facilite la décomposition d'une fonction en facteurs rationnels, précède immédiatement le théorème de Galois sur l'expression des racines de l'équation proposée en fonction rationnelle de celles de la résolvante ; ce théorème est en outre simplifié par l'emploi du tableau que M. Echegaray appelle *de Galois*, à cause de l'application continuelle qu'il en fait dans la suite de son exposition.

Des exemples faciles sur la réductibilité, par l'amplification du domaine de rationalité, des équations irréductibles, préparent à la connaissance de ce qui est essentiel dans la méthode de Galois, c'est-à-dire à l'abaissement du degré de la résolvante ; l'étude du groupe caractéristique de toute équation, motive un judicieux examen des conclusions de M. Picard, publiées dans le troisième volume de son *Traité d'Analyse*, et provoque des observations lumineuses de M. Echegaray ; la distinction entre l'invariabilité de forme, et celle de la valeur numérique des fontions est très intéressante. *Parfois, la valeur numérique d'une fonction ne change pas, malgré le changement de forme*, ce qui arrive quand il existe des liaisons entre ses racines, circonstance très consciencieusement observée par M. Picard et aussi par M. Echegaray dans la suite de son ouvrage, dont le premier volume se termine par l'établissement de la réciprocité de deux des concepts : *domaine de rationalité*, *invariabilité*, et *groupe de l'équation*, par rapport au troisième.

L'objet prédominant des premiers cahiers parus du deuxième volume est l'*invariabilité de la valeur numérique* des fonctions ; l'auteur donne une grande importance au théorème de M. Picard sur le cas d'existence d'une relation rationelle entre les racines d'une équation, qui facilite la réduction des théorèmes relatifs à l'invariabilité de forme, à ceux concernant l'invariabilité numérique.

Il est à espérer que le deuxième volume, destiné tout entier à la théorie de Galois, augmentera l'intérêt du lecteur déjà familiarisé avec le style toujours attrayant de M. Echegaray.

Z. G. de Galdeano (Saragosse).

C. Burali-Forti. — **Les propriétés formales des opérations algébriques** ; in-8°, 40 p. ; Turin, G. Gallizio, 1900.

Cette brochure est extraite de la *Revue de mathématiques*. Elle renferme d'excellentes idées, dont plusieurs pourront profiter à l'enseignement. Malheureusement, les symboles dont l'auteur fait usage n'ont pas encore pénétré dans le public mathématique. Ce sont ceux que M. le Professeur Peano s'efforce de propager depuis plusieurs années avec beaucoup de persistance et beaucoup de talent ; il faut avouer cependant que cette sorte de langue nouvelle n'est pas exempte de difficultés, devant lesquelles plus d'un mathématicien recule. Et puis, progressivement, les symboles augmentent en nombre

et se compliquent. M. Burali-Forti nous en fournit une nouvelle preuve dans sa brochure. Ce sont là, malgré tout, des tentatives auxquelles il faut applaudir et qu'il serait absurde de dédaigner. Nous espérons que nous aurons occasion de revenir prochainement sur ce sujet, à propos du *Formulaire mathématique* de M. Peano.

HEINRICH BURKHARDT. — **Elliptische Functionem.** 1 vol. in-8° de x-174 p. Prix : 12 fr. 50. Leipzig, Verlag von Veit und Comp., 1899.

Voici la seconde partie[1] des « Leçons sur la théorie des fonctions » de M. BURKHARDT, professeur ordinaire à l'Université de Zurich. Ce volume, très bien accueilli en Allemagne et qui nous paraît à tous les égards mériter l'attention du public mathématique, renferme, en 350 pages, un exposé précis et complet de la théorie des fonctions elliptiques,

L'ouvrage est surtout intéressant par sa tendance. Jusqu'ici les méthodes de Riemann n'avaient été que peu ou pas employées dans les exposés élémentaires. Dans ce manuel, au contraire, les belles conceptions de ce géomètre occupent la place d'honneur, autour de laquelle viennent se grouper les branches diverses de la théorie. L'auteur ne néglige point pour cela les méthodes si rigoureuses de Weierstrass, il les emploie très souvent et avec avantage. Loin du reste de s'exclure, les méthodes des deux illustres géomètres se complètent admirablement, et l'on peut bien dire que l'ouvrage de M. Burkhardt en est une heureuse synthèse.

M. Burkhardt semblait appelé à l'écrire. Parmi les jeunes mathématiciens allemands, l'un des plus distingués, il fut mis au courant des théories de Weierstrass par M. Schwarz, tandis qu'à l'école de Goettingue, si brillamment dirigée par M. Klein, il fut en contact avec l'esprit de Riemann toujours vivant dans la savante petite ville.

Nous pouvons diviser l'ouvrage en trois parties. La première, comprenant les six premiers chapitres, renferme l'étude des trois espèces de fonctions elliptiques, des intégrales elliptiques et du problème d'inversion ; la seconde, les chapitres VII à XIII, traite des transformations et de l'emploi des fonctions elliptiques ; la troisième et dernière se rapporte à des applications.

Les fonctions elliptiques prises comme fonctions fondamentales sont celles des Weierstrass, les notations adoptées, de même, à une exception près. MM. Tannery et Molk, M. Study et après eux, M. Burkhardt désignent par ω^2 l'expression $-(\omega^1+\omega^3)$ et non pas $\omega^1+\omega^3$, comme le fait Weierstrass.

Prenant comme point de départ les intégrales elliptiques et les envisageant comme intégrales de certaines fonctions algébriques, l'auteur étudie d'abord la surface de Riemann correspondante. Puis il cherche une variable dite « uniformisante », au moyen de laquelle ces fonctions deviennent unformes ; les intégrales elliptiques deviendront ainsi des intégrales de fonctions uniformes. Cette variable « uniformisante » n'est autre que l'intégrale elliptique de première espèce. Toute fonction algébrique de la surface est alors fonction uniforme doublement périodique de cette variable et réciproquement. Il s'établit ainsi un parallélisme entre la théorie des fonctions elliptiques et

[1] Voir dans l'*Enseignement mathématique*, 1re année, p. 468, l'analyse de la première partie.

celle des fonctions algébriques. Par exemple, au théorème sur la somme des zéros et des pôles dans un parallélogramme des périodes, au théorème d'Hermite sur les fonctions de Jacobi correspondent respectivement les théorèmes d'Abel et de Riemann-Roch lorsqu'on les applique aux fonctions algébriques de genre un.

Tel est, rapidement esquissé, le point central de la première partie.

Dans la seconde partie, M. Burkhardt examine tout d'abord et à deux points de vue différents, les transformations linéaires, la dégénérescence et les cas de réalité des fonctions elliptiques en considérant tantôt le parallélogramme des périodes de la fonction, tantôt la surface de Riemann correspondante. Il fait voir, par exemple, comment peut s'obtenir chaque transformation linéaire soit par modification des coupures, soit par « monodromie des points de ramification » sur la surface de Riemann. Passant ensuite aux éléments de la théorie des fonctions modulaires et aux transformations d'ordre supérieur, l'auteur nous donne l'essentiel des theories générales, tandis qu'il traite très complètement les cas élémentaires, afin de les utiliser dans un chapitre spécial (XIII) : Calcul numérique des fonctions elliptiques. Ce chapitre, le plus souvent laissé de côté dans les autres traités, est au contraire la conclusion bien comprise de cette seconde partie : l'auteur nous montre comment, dans la résolution numérique de questions renfermant des fonctions ou des intégrales elliptiques, les théories précédentes sont à appliquer dans chaque cas, afin d'obtenir les résultats avec le moins de calcul possible et avec toute l'approximation désirée.

Les applications de la troisième partie portent sur les courbes elliptiques, planes et gauches, sur les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions elliptiques, en particulier l'équation de Lamé, et enfin sur le pendule sphérique qui donne l'occasion d'appliquer les cas de dégénérescence.

Ce livre si instructif, quelquefois un peu concis quoique très clair, et renfermant malheureusement maintes fautes typographiques, ne sera pas seulement le bienvenu parmi les étudiants, tous ceux qui s'intéressent à cette théorie ou qui sont appelés à l'enseigner y trouveront des vues originales et des démonstrations souvent remarquables par leur simplicité ou leur élégance,

Dr C. Jaccottet (Lausanne).