SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR

Autor(en): **Suppautschitsch, Richard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4663

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En tenant compte de la relation bien connue :

$$P_p . Q_{p-1} - P_{p-1} . Q_p = \pm 1,$$

on peut former l'équation

$$Q_{p-1}^2 + 2\lambda B\, Q_{p-1} - (A - \lambda^2) B^n \mp 1 = 0,$$

qui, résolue en $Qp\,r$, donne :

$$Q_{p-1} = -\lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}$$

où l'on a

$$B = \frac{Q_p}{n} = \frac{P_{p-1}}{m}.$$

On aurait trouvé de même

$$P_p = \lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}.$$

Comme ces valeurs doivent être des nombres entiers, on en déduit que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne lieu au théorème suivant de la théorie des nombres.

Théorème. — *Etant donné un nombre* A *non carré parfait il existe un ou plusieurs nombres entiers* B, *tels que l'on a* $A . B^2 \pm 1$ *carré parfait.*

Il faut remarquer qu'au nombre A correspondent un nombre limité d'irrationnelles y, et par conséquent aussi un nombre limité de valeurs B.

L. Crelier (Bienne).

SUR LA DÉMONSTRATION

DU THÉORÈME DE TAYLOR

I. — M. Hatzidakis (Athènes) a donné dans cette revue (II, p. 447) un article très intéressant sur une démonstration simplifiée de *la formule de Taylor*. Cependant trois inconvénients m'inspirent des scrupules :

1° L'adoption arbitraire des fonctions :

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \omega\,\sigma'(x) - \Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}, \qquad (\alpha)$$

et

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \frac{\omega}{1!}\sigma'(x) - \frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x) - \ldots - \frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) - \Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}}; \qquad (\beta)$$

2° La supposition attaquable que Γ, en réalité, fonction de n' et x, soit, dans la différentiation, une quantité constante ;

3° L'invraisemblance de pouvoir trouver la fonction (β) avant de connaître la formule de Taylor elle-même.

II. — J'essaierai donc de démontrer, sans hypothèses arbitraires, que le théorème de Taylor résulte presque immédiatement du théorème de *Rolle*.

Supposons (ce qu'il faut admettre dans ce théorème), que non seulement $f(x)$, mais aussi $f'(x)$, $f''(x)$..... $f^{(r)}(x)$ soient continues.

On aura donc :

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + h f'(x+\theta_1 h); \\ \text{mais, en outre,} \\ f'(x+\theta_1 h) = f'(x) + \theta_1 h\, f''(x+\theta_2\,\theta_1 h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x+\theta_n\theta_{n-1}\ldots\theta_1 h) = f^{(n)}(x) + \theta_n\ldots\theta_1 f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}.\theta_n\ldots\theta_1 h). \end{array}\right\} \text{I}$$

et pour chaque θ_i :

$$0 < \theta_i < 1.$$

Or, bien que plusieurs θ_1, θ_2.... θ_{n+1} puissent répondre à chaque équation, chaque expression se compose de deux parties, c'est-à-dire d'une partie, susceptible d'une seule interprétation, et d'une autre susceptible de plusieurs interprétations. Celle-ci disparaît continuellement et ne reste qu'à la dernière expression :

$$f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}\,\theta_n\ldots\theta_1 h).$$

III. — Je multiplie d'abord les équations (1) (la 2e, 3e, 4e...) par h, $\theta_1 h^2$, $\theta_2 \theta_1^2 h^3$,.... etc., et j'obtiens, en les additionnant :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \theta_1 h^2 f''(x) + \theta_2\theta_1^2 h^3 f'''(x) + \dots$$
$$\dots + \theta_{n-1}\theta^2_{n-2} \dots \theta_1^{n-1} h^n f^{(n)}(x) + \Phi \qquad (2)$$

où

$$\Phi = \theta_n \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h). \quad 0<\theta<1.$$

De plus, en supposant h variable, on aura les dérivations successives de (2) :

$$f'(x+h) = f'(x) + 2\,\theta_1 h f''(x) + 3\,\theta_2\theta_1^2 h^2 f'''(x) + \dots + D_h \Phi$$
$$f''(x+h) = \qquad 1.2\,\theta_1 f''(x) + 2.3.\theta_2\theta_1^2 h f'''(x) + \dots + D_h^{(2)} \Phi$$

. . . . . .

$$f^{(n+1)}(x+h) = D_h^{(n+1)} \Phi = \theta_n\, \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n \Big[\overline{n+1}!\, f^{(n+1)}(x+\theta h)$$
$$+ \binom{n-1}{1} n.!\, h.\, \theta f^{n+2}(x+\theta h) + \dots + \binom{n+1}{n+1} h^{n+1}\, \theta f^{2(n+1)}(x+\theta h) \Big].$$

Donnons à h dans toutes ces équations la valeur $h=0$, nous aurons :

$$\theta_1 = \frac{1}{2!}; \qquad \theta_2\theta_1^2 = \frac{1}{3!}; \qquad \dots\dots\ \theta_n\, \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n = \frac{1}{\overline{n+1}!}$$

donc :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\overline{n+1}!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \qquad (3)$$

Ainsi toutes les expressions (1), dont nous avons parlé ci-dessus (II) deviennent interprétables d'une *seule* manière à l'exception du dernier terme de (3), qui s'annule, comme on le sait, dans tous les cas où cette formule peut avoir lieu.

RICHARD SUPPAUTSCHITSCH (Vienne, Autriche).