SUR LA CONSTRUCTION DES CONIQUES EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Autor(en): **Alliaume, Maurice**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4648

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA CONSTRUCTION DES CONIQUES

EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

---

1. La proposition suivante : *deux faisceaux de rayons projectifs situés dans un même plan engendrent par leur intersection une conique passant par les centres des faisceaux*, est l'un des théorèmes les plus connus de Géométrie synthétique. Il en résulte immédiatement la possibilité de résoudre le problème : *Étant donnés cinq points d'une conique, en trouver un sixième.* En effet, si l'on prend deux de ces points donnés comme centres de faisceaux, la projectivité de ceux-ci est parfaitement fixée par les trois couples de rayons qu'on en connaît. Il suffira donc de chercher l'homologue d'un quatrième rayon quelconque : son intersection avec celui-ci donnera le sixième point demandé.

Il existe bien des méthodes pour arriver à ce résultat, mais la plupart exigent le tracé de plusieurs formes auxiliaires. On est cependant arrivé à une notable simplification en coupant les deux faisceaux par deux ponctuelles de *porteurs bien déterminés*; mais ce procédé n'a fait que retrouver projectivement le *théorème de Pascal.*

Je me propose donc dans cet article de donner, du problème énoncé plus haut, une solution que je crois nouvelle et qui est, à la fois, simple et indépendante de toute proposition de Géométrie analytique.

2. Soit (fig. 1) une conique sur laquelle nous prenons quatre points, S, S′, M, N′, fixes, et un cinquième point $\mathcal{S}$ mobile et prenant successivement les positions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$... Joignons SN′ et S′M ; et appelons u, S′M et u', SN′. Dans le mouvement du point $\mathcal{S}$, astreint à rester sur la conique, le rayon S$\mathcal{S}$ engendrera une

ponctuelle u (S_1,A_1,B_1...) et le rayon S′ S une autre ponctuelle u' (S'_1, A'_1, B'_1...). Ces deux ponctuelles sont évidemment projectives.

Si maintenant nous formons deux faisceaux ayant respectivement comme centres S'_1 et S'_1 et pour rayons (S_1 A'_1), (S_1 B'_1)... et (S'_1 A_1) (S'_1 B_1)..., ces deux faisceaux seront perspectifs comme ayant un élément uni (S_1 S'_1); donc leurs rayons homologues se couperont en des points A, B,..., tous en ligne droite.

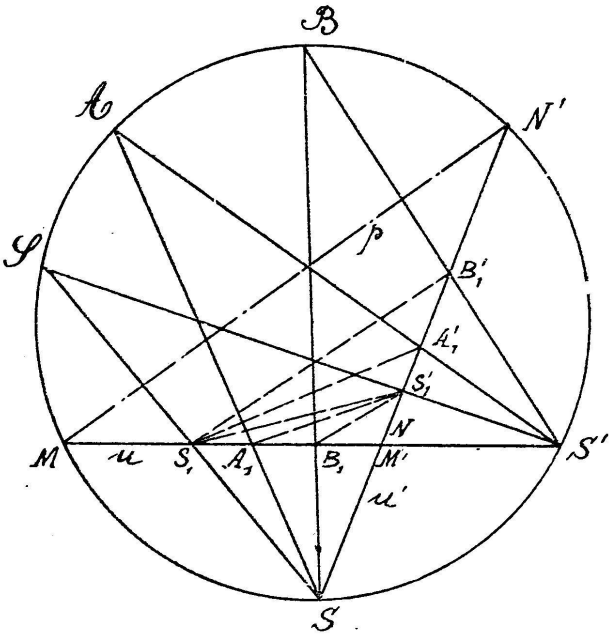

Fig. 1.

Que ces rayons se coupent ou non dans les limites de l'épure, il n'en est pas moins facile de déterminer la droite qu'ils forment. En effet, si $\mathcal{S}$ vient en M, point de rencontre de la conique avec u, l'intersection des deux rayons homologues se trouvera précisément en M; donc, la droite en question, que nous appellerons p, passe par M. De même, en faisant arriver $\mathcal{S}$ en N′, on verrait que p doit aussi passer par N′. Ces deux points suffisent à parfaitement déterminer p.

3. Les conclusions précédentes une fois admises, on voit clairement la possibilité d'une nouvelle méthode de résolution du problème suivant : *Etant donnés cinq points d'une conique, en déterminer un sixième.* Voici quelle est la marche à suivre (fig. 2) Les cinq points donnés étant marqués I, II, III, IV, V, les joindre suivant (I, III, V, II, IV, I) de manière à former un penta-

gone étoilé [1]; marquer (I III) $= p$, (III, V) $= u$, (I IV) $= u'$. Soit à trouver un point X de la conique, et situé sur le rayon quelconque (IV, Z) $= r$. Les intersections (II IV, u), (II V, u') déterminent respectivement les centres de faisceaux S et S'. — Marquer X_1 l'intersection (r, u). Pour trouver X'_1, homologue de X_1, chercher le point de rencontre de $S' X_1$ avec p en (X) et joindre S (X) qui donne X'_1 en coupant u'. Il est maintenant visible que le point de rencontre avec r de la droite (X'_1 V) est le point X demandé.

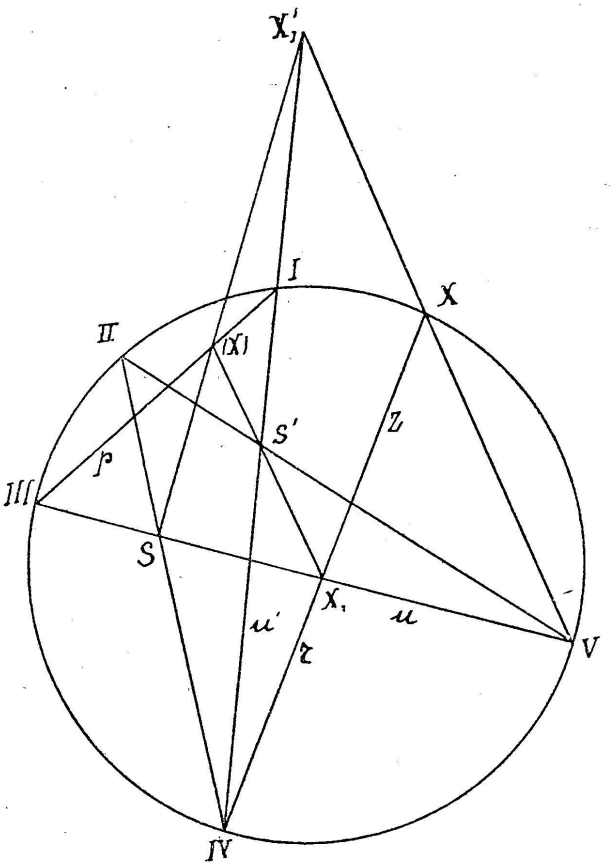

Fig. 2.

4. La loi de dualité fournit immédiatement une méthode correspondante pour *trouver une tangente nouvelle à une conique déterminée par cinq premières tangentes.*

On se base alors sur le théorème suivant : *Les droites joignant les points homologues de deux ponctuelles projectives, situées dans un même plan, enveloppent une section conique ayant pour tangentes les porteurs de ces ponctuelles.*

Tout ce qui a été exposé aux paragraphes précédents peut, en définitive, se résumer de la manière suivante :

Les deux faisceaux projectifs engendrent deux ponctuelles projectives qui servent à former deux faisceaux perspectifs dont on connaît la droite d'intersection. Par analogie, la résolution du problème corrélatif peut se condenser comme suit : *Les deux ponctuelles projectives* — deux tangentes fixes dont trois

---

[1] La forme étoilée donnée à ce pentagone n'est évidemment pas essentielle dans la construction, mais de nombreux essais m'ont montré combien elle est avantageuse.

couples de points homologues sont donnés pour trois positions connues d'une tangente mobile — *engendrent deux faisceaux projectifs qui servent à former deux ponctuelles perspectives dont on connaît le centre de perspectivité.*

Ce problème diffère trop peu du précédent pour que je m'étende plus longuement sur sa résolution.

5. Les deux théorèmes précédemment rappelés comportent chacun un corollaire :

1. *Lorsqu'une conique est engendrée par l'intersection de deux faisceaux projectifs, la tangente ayant pour point de contact le centre de l'un des faisceaux a pour homologue, dans l'autre, le rayon qui en joint les deux centres.*

2. *Lorsqu'une conique est engendrée par la jonction de deux ponctuelles projectives, le point de contact de l'une d'elles a pour homologue leur point d'intersection considéré comme élément de l'autre.*

Si l'on tient compte de ces corollaires, la solution que j'ai indiquée plus haut peut, étendue par la loi de dualité et traitée dans ses cas limites, fournir facilement la résolution de toute une série de problèmes dont voici l'énoncé général :

Une conique est déterminée par cinq conditions; on en demande un nouvel élément.

Ces problèmes, au nombre de six, découlent trop naturellement des considérations précédentes pour que je les aborde ici. — Mais ils peuvent très utilement se proposer comme exercices. Leur résolution me semble pour les élèves un excellent moyen de se familiariser avec les procédés de la Géométrie projective.

MAURICE ALLIAUME (Louvain).