Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1902)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE PLANE
Autor: Dellac, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5591

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR

L'EMPLOI DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE PLANE

Dans un article inséré dans l'*Enseignement mathématique* du 15 septembre 1901, M. Emile Lemoine discute cette question : faut-il dès le commencement de la Géométrie attribuer des signes aux grandeurs étudiées, et en particulier aux segments de droite situés d'une manière quelconque dans le plan ? Il reconnaît lui-même qu'il n'y a pas de principe général pour cela, mais il demande qu'on le fasse toutes les fois que cela est possible.

Je ne suis pas de cet avis : il me paraîtrait dangereux de mêler des théorèmes admettant le principe des signes avec d'autres ne l'admettant pas, sans que cette distinction résulte d'un principe général et de conventions uniformes sur l'emploi des signes. Ne vaut-il pas mieux ne tenir compte d'abord que des grandeurs absolues, et réserver pour une revision complémentaire l'introduction des signes, lorsqu'on voudra étudier ce qu'on appelle *les méthodes en Géométrie* ?

Ainsi il faudra d'abord introduire les signes des segments situés sur une droite. Ce n'est pas un emprunt que la Géométrie fera à l'Algèbre ; c'est plutôt le contraire. La seule théorie des quantités négatives qui ne repose pas sur des conventions arbitraires, est celle qui résulte de l'étude des grandeurs relatives et en particulier de celle des segments en ligne droite. Mais ceci appartient à la géométrie linéaire plutôt qu'à la géométrie plane.

Selon moi il n'y a, dans le plan, que deux espèces de grandeurs susceptibles de signes d'une manière générale : les angles et les aires.

Les cas de segments de droite situés dans le plan et susceptibles de signes, résultent des angles ou des aires. Ainsi il peut

arriver que dans une relation où entrent des aires on puisse supprimer un facteur commun ; alors le signe de l'aire vient affecter le facteur restant, de sorte que l'on a des segments susceptibles de signes, mais d'après des *règles particulières à la question traitée.*

Exemples : la relation qu'il y a entre les côtés d'un quadrilatère circonscriptible ; le problème de Pappus, etc. Si on exprime de trois manières différentes l'aire d'un triangle et qu'on supprime un facteur commun, on a la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, et ces relations admettent le principe des signes, puisque les aires l'admettent. La première des relations qu'il y a entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, s'obtient en exprimant de deux manières différentes l'aire du quadrilatère ; par suite elle est susceptible de signes. On sait que la deuxième relation se déduit de la première. Je ne parle pas des transversales, où n'entrent que des rapports de segments en ligne droite.

L'attribution des signes aux segments de droite situés dans un plan, faite d'une manière générale, peut conduire à des résultats paraissant contradictoires. Ainsi prenons le lieu des points M tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes O, O′ soit constant et égal à un rapport donné ρ. On sait que c'est le cercle ayant pour diamètre CC′, en désignant par C et C′ les points qui partagent O O′ X dans les rapports $+\rho$ et $-\rho$. (J'ai déjà proposé d'appeler ce lieu si usuel « cercle conjugué aux points O, O′ suivant le rapport ρ ».) Quelle que soit la loi d'après laquelle on donne des signes aux segments MO, MO′, on arrive à cette conséquence que ce rapport doit rester constant tout le long de la circonférence, et cependant en C, C′, il a des signes différents !

Cette difficulté s'est présentée à moi dans mon mémoire sur la *Similitude des figures solides* [1], et je crois que ce n'est que par la théorie de la similitude plane qu'on peut la faire disparaître. Je reprends ici les principes de cette théorie qui me sont nécessaires.

Je prends dans le plan deux droites quelconques L, L′, que

[1] *Annales de la Faculté des sciences de Marseille*, t. IX.

j'appellerai *lignes de repère*. Sur ces droites je prends deux points O, O′ qui doivent être homologues dans les deux figures semblables. Sur les lignes de repère je mets des flèches pour indiquer les parties OL, O′L′ qui doivent se correspondre. Il s'agit de construire dans le plan deux figures semblables F, F′ rattachées à ces droites et ayant pour rapport de similitude un nombre donné ρ. Je place en O et O′ deux observateurs dressés au-dessus du plan et regardant chacun sa flèche. Soit m un point quelconque de la figure F ; je tire OmZ. Au point O′ je mène la droite O′Z′ faisant avec O′ L′ un angle égal à l'angle LOm et *dans le même sens de rotation* (voir E. M., 15 janvier 1901) : la direction O′Z′ sera dite de même signe que OZ. Supposons ρ positif. Je porte sur O′Z′ la longueur O′m' = ρ. Om, et le point m' est l'homologue du point m. Lorsque m parcourt la figure F, le point m' parcourt la figure F′, et ces deux figures forment un système directement semblable. Si ρ est négatif, je porte sur le prolongement de O′Z′ un segment O′m'' égal à la valeur absolue du produit ρ. Om, et le point m'' est l'homologue du point m ; les deux figures F, F″ forment un système inversement semblable. Il est à remarquer que par le changement de ρ en $-\rho$ on obtient le même système que si, laissant ρ positif, on change le sens de la flèche de O′L′.

En particulier si m parcourt la ligne de repère L, le point m' ou m'' parcourt la ligne L′ ; ces points tracent sur les deux droites deux divisions semblables faisant partie des figures F, F′ ou F″. Par conséquent ces deux divisions semblables ont le même centre de similitude que les figures complètes F, F′ ou F″

Pour simplifier, je suppose que le point O′ soit sur OL. Alors l'angle LO′L′, angle des flèches, est l'*angle de rotation*, c'est-à-dire un angle tel que si l'on fait tourner l'une des figures d'un angle égal, les segments homologues deviennent parallèles, et les deux figures sont homothétiques directement ou inversement suivant le signe de ρ.

Etudions les deux cas particuliers où l'angle LOL′ est égal à zéro ou à 180°.

Si l'angle LOL′ est nul, la droite O′L′ se place sur OL, les flèches étant tournées dans le même sens. Par suite, sur cette droite OL, il y a deux divisions semblables qui ont un *point double* ou

centre de similitude. Si ρ est positif ce point C′ est extérieur au segment OO′ et l'on a $\frac{C'O'}{C'O} = \rho$. Si au contraire ρ est négatif ce point C se trouve sur OO′, et l'on a en valeur absolue $\frac{CO'}{CO} = \rho$. Ce sont les deux points qui partagent OO′ dans les rapports ρ et $-\rho$.

Supposons que l'angle LOL′ devienne égal à 180°. La droite O′L′ se place sur le prolongement de OL et les deux flèches ont des sens contraires. Donc les deux divisions semblables sont les mêmes que si dans le cas précédent on avait changé le sens de la flèche de O′L′. On retrouve donc les mêmes points doubles ; seulement les rôles sont changés : C′ convient au cas de ρ négatif et C au cas de ρ positif.

Cela posé prenons pour figures semblables deux circonférences O, O′ de rayons r, r'. Soit a le point de la première situé sur OL, et a' le point homologue de la seconde situé sur O′L′. En faisant varier la position du point a', c'est-à-dire l'angle de rotation LO′a', on obtient une infinité de systèmes semblables que l'on peut arbitrairement regarder comme directs ou inverses. Soit M le centre de similitude de l'un d'eux ; les segments MO, MO′ étant homologues, on a en valeur absolue $\frac{MO'}{MO} = \frac{r'}{r} = \text{const.}$ Donc le lieu du point M est le cercle conjugué aux deux centres O, O′ suivant le rapport $\frac{r'}{r}$ et, auprès de chaque point de la circonférence, on peut arbitrairement mettre + ou —.

Mais ne considérons que les systèmes directement semblables, c'est-à-dire prenons $\rho = +\frac{r'}{r}$; tout le long de la circonférence le rapport de similitude est positif ; voyons ce qui arrive aux extrémités C, C′. Lorsque l'angle de rotation est nul, le point M vient en C′, et nous venons de voir que le rapport de similitude est positif en ce point, même si on regarde ce point comme point double des deux divisions semblables situées sur OO′L.

Lorsque l'angle de rotation est égal à 180°, le point M vient en C, et nous venons de voir aussi que le rapport de similitude est encore positif, même si on considère ce point comme point double des deux divisions semblables situées sur OO′L, qui ont alors leurs flèches dirigées en sens contraires.

Il y a encore accord, si on ne considère que les systèmes inversement semblables.

Les mêmes considérations sont applicables toutes les fois qu'intervient le lieu du point M, car rien n'empêche d'ajouter à la figure donnée deux figures semblables dans lesquelles MO, MO′ seraient deux segments homologues.

Ainsi la contradiction signalée plus haut tient à ce que, lorsqu'on veut partager le segment OO′ dans un rapport donné, la solution ordinaire restreint la question en supposant implicitement que les deux divisions semblables que l'on doit supposer sur OO′, ont nécessairement leurs flèches dans le même sens, c'est-à-dire croissent dans le même sens. Ce problème est le même que celui qui consiste à trouver le point de rencontre de deux mobiles qui se déplacent sur la droite OO′ avec des vitesses données et passent simultanément en O et O′. Bien qu'il n'y ait que deux lieux de rencontre, le problème comporte 4 cas, parce que chaque rencontre peut se placer dans le passé ou dans l'avenir.

Je conclus de cette discussion que, puisque le lieu du point M est souvent utile lorsqu'on ne considère que les valeurs absolues et qu'il est très délicat de l'introduire en donnant des signes aux segments, il vaut mieux suivre la marche traditionnelle. Il sera facile ensuite d'introduire ce lieu dans les questions où on a besoin du principe des signes : dans ces questions la contradiction signalée se trouvera résolue d'elle-même.

H. Dellac (Marseille).