SUR LES DIVISIONS HOLOGRAPHIQUES

Autor(en): **Crelier, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6638

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES

Introduction. — Quand on développe la théorie des divisions homographiques au moyen de l'équation algébrique fondamentale

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0$$

on est amené à considérer deux origines O et O′ pour compter les segments x, x'.

En disant que l'équation doit être satisfaite quelles que soient les origines, on admet le fait comme évident *à priori*. Cependant nous croyons bon, dans l'intérêt des débutants de la géométrie synthétique, de donner une forme plus concrète et plus précise à ce principe, en l'énonçant comme un théorème dont la démonstration simple conduit d'une manière palpable aux propriétés connues des coefficients λ, μ et ν.

Tel est le but que nous nous proposons dans les lignes qui suivent.

Définition. — On appelle divisions homographiques des suites de points telles qu'à chaque point de l'une correspond un point et un seul de l'autre.

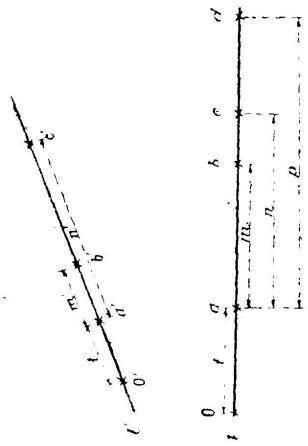
Équation. — Il existe donc entre les segments x et x' déterminés sur deux bases l et l', par deux points homologues et comptés depuis deux origines données, une équation du premier degré de la forme :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ, μ, ν sont déterminés par trois paires de points homologues fondamentaux.

Théorème : *Étant donné 3 paires de points homologues fondamentaux, la position des éléments d'une quatrième paire sur les bases est indépendante des origines.*

Démonstration. — Soit O et O′ les origines, a, a'; b, b' et c, c' les 3 paires de points homologues fondamentaux. Désignons les segments comme suit :



$$Oa = t \qquad ab = m \qquad ac = n$$
$$O'a' = t' \qquad a'b' = m' \qquad a'c' = n'.$$

L'équation de définition s'appelle :

$$xx' - \lambda x' - \mu x' + \nu = 0.$$

Calculons d'abord les coefficients λ, μ et ν en formant les 3 équations correspondant aux points donnés ; nous avons :

$$\begin{aligned}
tt' \qquad\qquad\qquad - \lambda t \qquad - \mu t' \qquad + \nu &= 0 \\
(t+m)\,(t'+m') - \lambda\,(t+m) - \mu\,(t'+m') + \nu &= 0, \\
(t+n)\,(t'+n') - \lambda\,(t+n) - \mu\,(t'+n') + \nu &= 0.
\end{aligned}$$

Les solutions λ, μ et ν seront

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Formons ensuite ces déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -t & -t' & +1 \\ -(t+m) & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -tt' & -t' & +1 \\ -(t+m)\,(t'+m') & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n)\,(t'+n') & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -t & -tt' & +1 \\ -(t+m) & -(t+m)\,(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t+n)\,(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -t & -t' & -tt' \\ -(t+m) & -(t'+m') & -(t+m)\,(t'+m') \\ -(t+n) & -(t'+n') & -(t+n)\,(t'+n') \end{vmatrix}$$

Développons et simplifions :

$$\begin{aligned}
\Delta &= m'n - mn', \\
\Delta_1 &= t'(mn' - m'n) + m'n'(m - n), \\
\Delta_2 &= t(mn' - m'n) + mn(n' - m'), \\
\Delta_3 &= tt'(mn' - m'n) + tm'n'(m - n) + t'mn(n' - m').
\end{aligned}$$

On peut encore écrire évidemment :

$$1 \quad \begin{cases} \Delta_1 = \Delta t' + m'n'(m - n), \\ \Delta_2 = \Delta t + mn(n' - m'), \\ \Delta_3 = \Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'. \end{cases}$$

Prenons maintenant un 4e point d sur l, donnant

$$x = t + p \text{ avec } p = ad.$$

Son homologue d' sur l' donne

$$x' = t' + p' \text{ avec } p' = a'd'.$$

La valeur x' se déduira de celle de x d'après l'équation fondamentale :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

On aura :

$$x' = \frac{\lambda x - \nu}{n - \mu}.$$

Introduisons les valeurs des déterminants :

$$x' = \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta} x - \frac{\Delta_3}{\Delta}}{x - \frac{\Delta_2}{\Delta}} = \frac{\Delta_1 x - \Delta_3}{\Delta x - \Delta_2}.$$

Avec les segments p, t, p' et t', on a :

$$p' + t' = \frac{\Delta_1 (t + p) - \Delta_3}{\Delta (t + p) - \Delta_2}.$$

Développons ensuite p'

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{\Delta_1 (t + p) - \Delta_3}{\Delta (t + p) - \Delta_2} - t' \\
&= \frac{\Delta_1 t + \Delta_1 p - \Delta_3 - t't\Delta - t'p\Delta + t'\Delta_2}{\Delta t + \Delta p - \Delta_2}.
\end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs (1) et en simplifiant, on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)p}{p(mn'-m'n)-mn(n'-m')}.$$

D'où il résulte que la position du point d' par rapport aux points a', b' et c' est indépendante des valeurs t et t', c'est-à-dire indépendante des origines O et O' sur les bases l et l'. C. q. f. d.

Remarque. — Puisque la position des éléments des paires nouvelles est indépendante des origines primitivement choisies, on peut prendre celles-ci d'une manière arbitraire sur les bases, en observant que les 3 paires fondamentales déterminent chaque fois des nouvelles valeurs de λ, μ et ν.

Calcul des coefficients. — Nous avons eu

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

En introduisant les valeurs tirées des déterminants, on obtient :

$$\lambda = \frac{\Delta t' + m'n'(m-n)}{\Delta} = t' + \frac{m'n'(m-n)}{m'n'-m'n},$$

$$\mu = \frac{\Delta t + mn(n'-m')}{\Delta} = t + \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = \frac{\Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'}{\Delta} = tt' + \frac{tm'n'(m-n) + t'mn(n'-m')}{mn'-m'n}$$

ou

$$\nu = \lambda t + \mu t' - tt'.$$

Cas particuliers : 1° d *tombe en* b *ou en* c.
On a alors

$$p = m \text{ ou } p = n.$$

Supposons donc $p = n$; on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)n}{n(mn'-m'n)-mn(n'-m')} = n'.$$

On voit que d' tombe sur l'homologue de c, soit c'.
De même avec b et b'.

2° *Les origines sont une paire de points homologues comme* a, a'.

Dans ce cas les valeurs t et t' sont nulles et on obtient

$$\lambda = \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n},$$

$$\mu = \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = 0.$$

L'équation générale devient :

$$xx' - \lambda x - \mu x' = 0,$$

ou

$$x' = kx,$$

avec

$$k = \frac{\lambda}{x-\mu} = \frac{m'n'(m-n)}{(mn'-m'n)x - mn(n'-m')}.$$

On voit que x' s'annule avec x

4° *Le conjugué d'un point comme* b *est à l'infini.*

Dans ce cas on a $m' = \infty$.

Les valeurs λ, ν et p' ne présentant pas de remarques particulières.

La valeur μ prend la forme : $\mu = t + m = \overline{Ob}$.

Si on faisait de même $n = \infty$, c'est-à-dire si on prenait c à l'infini, on aurait

$$\lambda = t' + n' = \overline{O'c'}.$$

Les points conjugués des points à l'infini portent le nom de *points limites*.

On en conclut que les coefficients λ et μ sont donnés par les distances des points limites de chaque base à l'origine correspondante.

En outre, si les points limites étaient les origines, on aurait :

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

D'où

$$xx' = -\nu = tt'$$

t et t' désignant les distances de ces points aux points a et a'.

5° *On prend* d *à l'*∞.

Le conjugué d' du point d_α donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

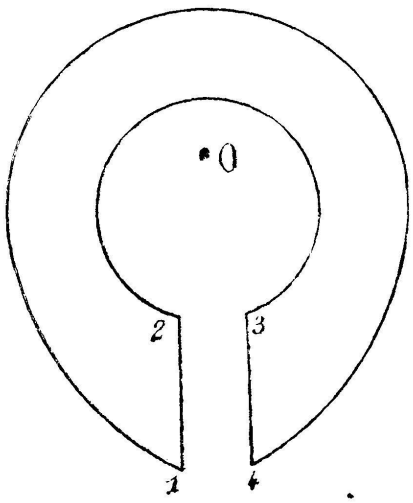
L. Crelier (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (X dx + Y dy + Z dz)$$
$$= \int_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) n \Big\} dw$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dw de la surface.



Nous poserons

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v),$$

de telle sorte que ce soient

$$x = f(v_1, u), \text{ etc.}$$
$$x = f(v_2, u), \text{ etc.}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4, et

$$x = f(v, u_1), \text{ etc.}$$
$$x = f(v, u_2), \text{ etc.}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.