LA FORMULE DE STOKES

Autor(en): **Silva, Otto A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6639

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn' - m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

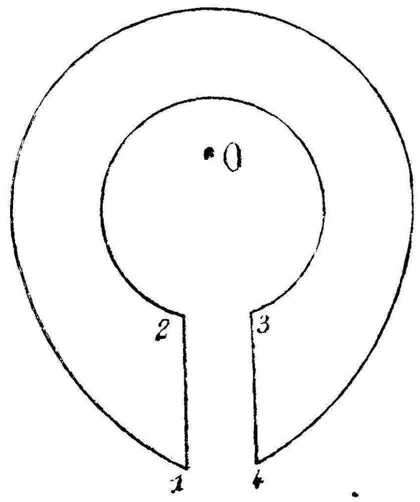
L. Crelier (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$
$$= \int_{\mathrm{S}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} \right) n \right\} d\omega$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$ de la surface.



Nous poserons

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v),$$

de telle sorte que ce soient

$$x = f(v_1, u), \text{ etc.}$$
$$x = f(v_2, u), \text{ etc.}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4, et

$$x = f(v, u_1), \text{ etc.}$$
$$x = f(v, u_2), \text{ etc.}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.

Nous aurons évidemment

$$\int_0 (X dx + Y dy + Z dz) = {}^{(v_1)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du$$

$$- {}^{(v_2)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du + {}^{(u_1)}\int_{v}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv$$

$$- {}^{(u_2)}\int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv.$$

Mais d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sum \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right\} du\, dv + \int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv.$$

L'intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v}\, du\, dv.$$

En faisant les substitutions et les réductions on aura

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$+ \int_{1}^{u_2} \left\{ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{D(x_1 y)}{D(u_1 v)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \frac{D(y_1 z)}{D(u_1 v)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{D(z_1 x)}{D(u_1 v)} \right\} du\, dv.$$

En intégrant cette expression entre les limites v_1 et v_2 on a

$$\overset{(v_1)}{\int_{u_1}^{u_2}}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\dots\right)du - \overset{(v_2)}{\int_{u_1}^{u_2}}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\dots\right)du$$
$$+\overset{(u_1)}{\int_{v_2}^{v_1}}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\dots\right)dv - \overset{(u_2)}{\int_{v_2}^{v_1}}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\dots\right)dv$$
$$=\int_{v_2}^{v_1}\int_{u_1}^{u_2}\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{D(x_1y)}{D(u_1v)}+\dots\right\}du\,dv.$$

Le premier membre est l'intégrale le long du contour; le deuxième celle relative à la surface y comprise.

En désignant par l, m, n, les cosinus directeurs de la normale, on a

$$\int_0 (X dx + Y dy + Z dz)$$
$$=\int_S\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)l+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)m+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)n\right\}dw.$$

Il faut rapprocher maintenant les deux courbes 1-2 et 3-4, et réduire le petit contour 2-3 à un point.

Otto A. Silva (Rio de Janeiro).