Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

I

Si l'on donne à une racine d'un polynôme entier l'accroissement $\Delta\alpha$, les accroissements correspondants des coefficients du polynôme deviennent :

$$
\text{(A)} \qquad
\begin{aligned}
\Delta a_0 &= 0 \\
\Delta a_1 &= -a_0\,\Delta\alpha \\
\Delta a_2 &= -(a_1 + a_0\,\alpha)\,\Delta\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta a_\nu &= -(a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1})\Delta\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta a_\mu &= -(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\,a + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1})\Delta\alpha.
\end{aligned}
$$

Nous voyons cela, soit en divisant le polynôme donné par $x - \alpha$ et multipliant ensuite le quotient par $(x - \alpha - \Delta\alpha)$, soit en ayant égard aux relations entre les racines et les coefficients.

En observant que

$$a_\mu + \alpha\,(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\,\alpha + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1}) = 0$$

nous écrivons les relations (A) comme il suit :

$$
\text{(B)} \qquad
\begin{aligned}
\Delta a_\mu &= \frac{a_\mu}{\alpha}\,\Delta\alpha \\
\Delta a_{\mu-1} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha}\right).\Delta\alpha \\
\Delta a_{\mu-2} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^3} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha}\right).\Delta\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta a_1 &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^\mu} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^{\mu-1}} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha^{\mu-2}} + \ldots + \frac{a_1}{\alpha}\right).\Delta\alpha.
\end{aligned}
$$

Des relations (A) on déduit la formule de récurrence

$$\Delta a_\nu = -a_{\nu-1}\,\Delta\alpha + \alpha\,\Delta a_{\nu-1} \tag{C}$$

d'où suivent divers corollaires pour les variations des coefficients correspondants à la variation de la racine α.

1. — Quand une racine positive devient négative et que dans un groupe de coefficients de même signe du polynôme, un quelconque d'entre eux diminue absolument ou change de signe, tous ceux qui le précèdent changent nécessairement de signe.

Démonstration. — Supposons que nous ayons

$$a_{\nu-2} < 0 \quad a_{\nu-1} < 0 \quad a_\nu < 0$$
$$\alpha > 0 \quad \Delta\alpha < 0 \text{ mais } |\Delta\alpha| > \alpha \quad \Delta a_\nu > 0,$$

de la relation (C) nous tirons alors

$$-a_{\nu-1}\,\Delta\alpha + \alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > 0,$$

ou

$$\alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > a_{\nu-1}\,\Delta\alpha,$$

ou

$$\alpha.\,\Delta a_{\nu-1} > |a_{\nu-1}|\,.\,|\Delta\alpha|\,,$$

et comme

$$\alpha < |\Delta\alpha|$$

il s'ensuit

$$\Delta a_{\nu-1} > |a_{\nu-1}|\,,$$

donc

$$a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1} > 0.$$

Pareillement de

$$\Delta a_{\nu-1} > 0$$

on déduit que

$$a_{\nu-2} + \Delta a_{\nu-2} > 0.$$

On démontre de la même manière la proposition correspondante, quand nous avons

$$a_{\nu-2} > 0, \quad a_{\nu-1} > 0, \quad a_\nu > 0.$$

2. — Si dans un groupe de termes de même signe un quelconque

d'entre eux, le dernier excepté, ne change pas de signe, il en sera de même pour le suivant, car autrement le précédent ne pourrait garder son signe.

3. — Le changement d'une racine positive en négative détruit au moins une variation.

Démonstration. — Les coefficients du premier groupe conservent leur signe, puisqu'il en est de même du premier (car $\Delta\alpha_0 = 0$) (voir remarque 2). Ceux du dernier groupe, au contraire, changeront tous de signe, puisqu'il en est de même du dernier terme

$$\text{car } (a_\mu + \Delta a_\mu).a_\mu < 0,$$

comme on déduit des relations (B), puisque

$$(a_\mu + \Delta a_\mu)a_\mu = a_\mu^2 \left(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)$$

mais

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| > 1$$

d'où

$$1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 0.$$

(voir remarque 1).

Quant aux autres groupes, trois cas peuvent se présenter :
1° ou tous les termes du groupe conservent leur signe ;
2° ou tous changent de signe ;
3° ou bien présentent une seule variation, de sorte qu'ils peuvent se subdiviser chacun en deux autres groupes, dont le second aura des coefficients ayant conservé leur signe (c'est-à-dire de même signe que les coefficients correspondants du polynôme donné).

Tout cela se voit d'après la remarque I.

Soit ν le nombre des groupes consécutifs du polynôme donné.

Ils présentent $\nu - 1$ variations, cherchons le nombre maximum des variations des coefficients correspondants du nouveau polynôme. Je dis que ce nombre maximum sera $\nu - 2$.

Car on aura ce nombre maximum en supposant que chaque groupe du polynôme donné à partir du deuxième jusqu'à l'avant-dernier fut subdivisé en deux autres groupes. Le nombre des groupes nouveaux, ainsi produits, sera $2(\nu - 1)$.

En représentant les groupes du polynôme donné par

$$\begin{array}{lllllll} (1) & & L, & M, & N, & P\ldots & J, & K \\ & \text{et par} & L' & \mu, \mu' & \nu, \nu' & \rho, \rho'\ldots & \sigma, \sigma' & K' \end{array} \qquad (2)$$

ceux du nouveau polynôme (c'est-à-dire par L' le groupe des coefficients correspondants à ceux du (L), par μ, μ' les groupes en lesquels fut subdivisé (M e. c. t., etc.). L'on voit que le signe des coefficients du groupe (μ) coïncide avec celui du groupe L, de même le signe des coefficients du groupe (ν) coïncidera avec celui du groupe (μ') et ainsi de suite.

Donc les groupes (2) coïncideront deux à deux en un groupe du nouveau polynôme et par conséquent ce dernier aura $\nu - 1$ groupes, c'est-à-dire $\nu - 2$ variations.

4. — De ce qui précède l'on déduit aussi le théorème de Descartes; car, pour chaque changement d'une racine positive en négative, il faut qu'un nombre impair de variations se perde; ce nombre impair de variations doit donc exister auparavant dans le polynôme. Du reste, après le changement des racines positives en négatives, le polynôme ne présentera pas un nombre impair de variations, car, autrement, il aurait une racine positive.

5. — Dans ce qui précède l'on supposait

$$|\Delta\alpha| > \alpha,$$

mais il est facile de montrer que les propositions précédentes seront vraies aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha;$$

l'on verra ainsi que, si un coefficient négatif devient positif, le coefficient suivant, s'il est positif, conservera son signe.

6. Soit le polynôme

$$a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_{\rho-1} x^{\mu-\rho+1} + a_\rho x^{\mu-\rho} + \ldots + a_{\sigma-1} x^{\mu-\sigma+1} + a_\sigma x^{\mu-1}$$
$$+ \ldots + a_{\tau-1} x^{\mu-\tau+1} + a_\tau x^{\mu-\tau} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\mu-\nu+1} + a_\nu x^{\mu-\nu} + \ldots + a_\mu,$$

dans lequel nous supposons les coefficients

$$\begin{array}{lll} a_0,\ a_1, \ldots & a_{\rho-1} & \text{positifs} \\ a_\rho,\ a_{\rho+1}, \ldots & a_{\sigma-1} & \text{négatifs} \\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1} \ldots & a_{\tau-1} & \text{positifs} \\ a_\tau,\ a_{\tau+1}, \ldots & a_{\nu-1} & \text{négatifs}. \end{array}$$

e. c. t.

Si dans le changement d'une racine positive en racine négative ou nulle nous avons

$$(E) \qquad \begin{array}{l} a_{\sigma-1} + \Delta a_{\sigma-1} > 0 \\ a_\sigma \quad + \Delta a_\sigma \quad > 0 \\ a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1} > 0 \\ a_\nu \quad + \Delta a_\nu \quad > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

c'est-à-dire si le dernier terme de chaque groupe négatif devient positif, et que le premier de chaque groupe positif reste positif, alors le polynôme donné n'a d'autre racine positive que α; car le nouveau polynôme aura tous les termes positifs et cela parce que le dernier terme de chaque groupe négatif devenant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui précèdent, deviendront positifs; de même le premier terme de chaque groupe positif restant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui lui suivent resteront positifs.

Les inégalités (E) peuvent aussi s'écrire comme il suit

$$\begin{array}{l} a_{\sigma-1} - (a_{\sigma-2} + a_{\sigma-3}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-2}).\Delta\alpha > 0 \\ a_\sigma \quad - (a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-1}).\Delta\alpha > 0 \\ a_{\nu-1} - (a_{\nu-2} + a_{\nu-3}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\nu-2}).\Delta\alpha > 0 \\ a_\nu \quad - (a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1}).\Delta\alpha > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et comme la proposition précédente est vraie aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha,$$

il s'ensuit que, pour que α soit la seule racine positive de polynôme, il suffit que

$$(z) \qquad \begin{array}{l} a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-1} > 0 \\ a_\sigma \quad + a_{\sigma-1}\alpha + a_{\sigma-2}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha_\sigma \quad > 0 \\ a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1} > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

mais comme de la première des inégalités (z) suit la seconde (d'après nos suppositions) et de la troisième, la quatrième, les conditions (z) se réduisent aux seules suivantes :

$$a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-1} > 0$$
$$a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha_{\nu-1} > 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en général, on montre de même que le nombre de variations que présentent les expressions

$$(a_{\varrho-1} + \Delta a_{\varrho-1},\ a_\varrho + \Delta a_\varrho,\ a_{\sigma-1} + \Delta a_{\sigma-1},\ a_\sigma + \Delta a_\sigma,\ a_{\tau-1} + \Delta a_{\tau-1},\ a_\tau + \Delta a_\tau,\ a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1}) \ldots$$

est précisément égal au nombre de variations que présentera le nouveau polynôme.

7. — Suivant Laguerre un nombre positif α est la limite supérieure des racines positives, si tous les polynômes suivants sont positifs

$$a_0\ (\equiv a'_0),$$
$$a_0\alpha + a_1\ (\equiv a'_1)$$
$$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + \alpha^2\ (\equiv a'^2)$$
$$a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + \alpha_3\ (\equiv a'_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\alpha_\mu + a_1\alpha^{\mu-1} + \ldots + a_\mu\ (\equiv a'_\mu)$$

Nous pouvons exprimer cette proposition encore d'une autre manière.

Soit le même polynôme que celui de la sixième observation : Je dis qu'il suffit d'avoir

$$a_0\alpha^{\sigma-1} + a_1\alpha^{\sigma-2} + \ldots\ldots + a_{\sigma-1} > 0$$
$$a_0\alpha^{\nu-1} + a_1\alpha^{\nu-2} + \ldots\ldots + a_{\nu-1} > 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour que α soit la limite supérieure des racines positives. Car alors la série

$$a_0,\ a_0\alpha + a_1,\ a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2,\ a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + \alpha_3, \ldots\ldots$$

sera aussi composée de termes positifs et cela parce que nous observons qu'aussi pour ces polynômes est vraie la formule de réduction

$$a'_n = a'_{n-1}\alpha + a_n;$$

par conséquent, quand $a'_{\sigma-1}$ est positif, a'_σ sera aussi positif, de même $\alpha'_{\sigma-2}$, car

$$a'_\sigma = a'_{\sigma-1}\alpha + a_\sigma,$$

et

$$a'_{\sigma-1} = a'_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-2}.$$

(Nous avons supposé $a_\sigma > 0 \qquad a_{\sigma-2} < 0$).

De même nous pouvons modifier la proposition de Laguerre, d'après laquelle la limite supérieure du nombre des racines positives du polynôme donné, plus grandes que α, est le nombre de variations de la série des expressions

$$a_0, a_0\alpha + a_1, a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \ldots\ldots, a_0\alpha^\mu + a_1\alpha^{\mu-1} + \ldots\ldots \alpha_\mu$$

Pour cela nous montrerons d'une manière analogue, que ce nombre est le même avec le nombre des variations de la série des polynômes

$$\begin{array}{l} a_0\alpha^{\rho-1} + a_1\alpha^{\rho-2} + \ldots\ldots + a_{\rho-1} \\ a_0\alpha^{\sigma-1} + a_1\alpha^{\sigma-2} + \ldots\ldots + a_{\sigma-1} \\ a_0\alpha^{\tau-1} + a_1\alpha^{\tau-2} + \ldots\ldots + a_{\tau-1} \\ a_0\alpha^{\nu-1} + a_1\alpha^{\nu-2} + \ldots\ldots + a_{\nu-1} \\ ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\end{array}$$

8. — Deux polynômes complets, ayant $m - 1$ racines communes et une différente, différeront au moins dans la moitié des coefficients; car s'ils ne diffèrent pas dans le coefficient du terme dont le rang est n, ils différeront dans celui du rang $n + 1$, comme on voit de la relation

$$\Delta a_{\nu+1} = +\alpha.\Delta a_\nu - a_\nu.\Delta\alpha,$$

mais

$$a_\nu \neq 0 \text{ et } \Delta\alpha \neq 0$$

donc

$$\Delta a_{\nu-1} \neq 0.$$