Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

Autor: Zervos, P.

Kapitel: II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par ${(x+a)}^2+b^2$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6641

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par $(x+a)^2+b^2$.

Considérons l'opération :

$$a_0x_\mu + a_1x^{\mu-1} + a_2x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-2}x^2 + a_{\mu-1}x + a_\mu \text{ (polynôme complet).}$$
$$x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2+b^2)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l|l}
a_0 & x^{\mu+2} + a_1 & x^{\mu+1} + a_2 & x^\mu + a_3 & x^{\mu-1} \ldots + a_{\mu-2} & & & \\
 & \quad + 2\alpha a_0 & \quad + 2\alpha a_1 & \quad + 2\alpha a_2 & \quad + 2\alpha a_{\mu-3} & & & \\
 & & \quad + (\alpha^2+b^2)\alpha_0 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_1 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-4} & & & \\
 & & & & & x^4 + a_{\mu-1} & x^3 + a_\mu & x^2 \quad x \\
 & & & & & \quad + 2\alpha a_{\mu-2} & \quad + 2\alpha a_{\mu-1} & \quad + 2\alpha a_\mu \\
 & & & & & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-3} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-2} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-1} \quad + (\alpha^2+b^2)a_\mu .
\end{array}$$

1. — Soit $\alpha > |\, b \,|$ et $a_\mu . a_{\mu-1} > 0$ alors le nouveau polynôme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

Démonstration. — Exprimons par

$a_0, a_1 \ldots, a_\rho$ le premier groupe des termes positifs.
$a_{\rho+1}, a_{\rho+2} \ldots, a_\tau$ le deuxième groupe des termes négatifs.
$a_{\tau+1}, a_{\tau+2} \ldots, a_\sigma$ le troisième groupe des termes positifs.

c. c. t.

Nous observons que, aux $\rho + 1$ premiers termes positifs du multiplicande correspondent $\rho + 1$ premiers termes positifs du produit.

Du a_ρ jusqu'à a_τ il se présente une variation au multiplicande ; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit; parce que dans la série

$$a_{\rho+1} + 2\alpha a_\rho + (\alpha^2+b^2)\, a_{\rho-1},\ a_{\rho+2} + 2\alpha . a_{\rho+1} + (\alpha^2+b^2)\, a_\rho,$$
$$a_{\rho+3} + 2\alpha a_{\rho+2} + (\alpha^2+b^2)\, a_{\rho+1}, \ldots,\ a_\tau + 2\alpha . a_{\tau-1} + (\alpha^2+b^2)\, a_{\tau-2}$$

tous les termes à partir du troisième, jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$|\, a_{\rho+1} \,| > 2 . \alpha . a_\rho$$

d'où aussi

$$2.\alpha.\ |\ a_{\varrho+1}\ | > (\alpha^2 + b^2)\ a_\varrho,$$

parce que

$$\alpha > |\ b\ |\ ;$$

par conséquent

$$|\ a_{\varrho+2} + 2\alpha a_{\varrho+1}\ | > (\alpha^2 + b^2).\ a_\varrho,$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande a_τ, $a_{\tau+1}$..... a_σ présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante : Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_\mu + 2\alpha a_{\mu-1} + (\alpha^2 + b^2)\ a_{\mu-2},\ 2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2)\alpha_{\mu-1},\ (\alpha^2 + b^2)\ a_\mu.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est $\mu + 1$ autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang $\mu + 1$ aura le même signe avec celui qui a le rang $\mu + 1$ du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient $a_\mu + 2\alpha.a_{\mu-1} + (\alpha + b^2)\ a_{\mu-2}$ aura le même signe avec a_μ par conséquent aussi avec $(\alpha^2 + b^2)\ a_\mu$ et aussi avec $2\alpha\ a_\mu + (\alpha^2 + b^2)\ a_{\mu-1}$ car, nous avons supposé que

$$a_\mu\ a_{\mu-1} > 0.$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang $(\mu + 1)$ moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1}\ a_\mu > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x-\alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x-\alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x-a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$