I. — Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

I. — *Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.*

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite σ qui, d'une manière quelconque, passe d'une position σ_1 à une position σ_2 ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système Σ à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position quelconque Σ_2, des relations semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

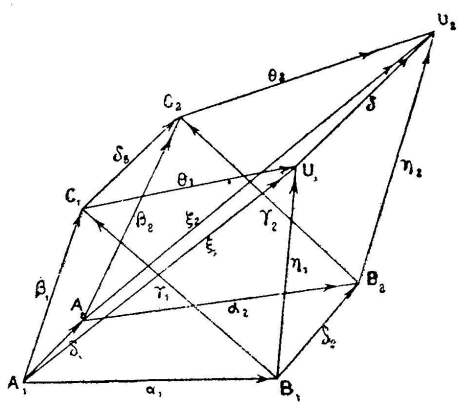

Fig. 1.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U; A_1, B_1, C_1, U_1 et A_2, B_2, C_2, U_2 sont les pyramides congruentes homologues de Σ, Σ_1 et Σ_2.

Nous posons (fig. 1).

$$\overline{A_1B_1} = \alpha_1,\ \overline{A_1C_1} = \beta_1,\ \overline{B_1C_1} = \gamma_1,\ \overline{A_1U_1} = \xi_1,\ \overline{B_1U_1} = \eta_1,\ \overline{C_1U_1} = \theta_1,$$
$$\overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ \overline{A_2C_2} = \beta_2,\ \overline{B_2C_2} = \gamma_2,\ \overline{A_2U_2} = \xi_2,\ \overline{B_2U_2} = \eta_2,\ \overline{C_2U_2} = \theta_2,$$
$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont des systèmes congruents, le produit inté-

rieur de deux vecteurs de Σ_1 est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de Σ_2.

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2 ;$$

mais nous avons

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1,$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_3 - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_3 + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1 .$$

De même nous trouvons

$$\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_2 | \delta_3 + \beta_1 | \delta_2 = (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1 .$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2 ;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \qquad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1 .$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\gamma = 0,\\
&\gamma_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \gamma_1 \mid \delta_1 + \xi_2 \mid \delta_2;\\
&\beta_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\beta = 0,\\
&\beta_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \beta_1 \mid \delta_2 + \xi_2 \mid \delta_1;\\
&\alpha_1 \mid \delta_\theta + \theta_2 \mid \delta_\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid \delta + \theta_2 \mid \delta_2 = \alpha_1 \mid \delta_3 + \theta_2 \mid \delta_1.
\end{aligned}$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (\beta_1 + \beta_2) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \delta_\alpha) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (2\beta_1 + \delta_\beta) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

ou

$$2\alpha_1 \mid \delta_\alpha + \delta_\alpha^2 = 0, \qquad 2\beta_1 \mid \delta_\beta + \delta_\beta^2 = 0, \ldots$$

Multiplions la première de ces équations par δ_β^2, la seconde par δ_α^2, il vient

$$2\,(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0, \qquad 2\,(\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0,\\
&(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 = 0.
\end{aligned}$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système Σ dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système Σ sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \mid d\beta + \beta_1 \mid d\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \beta_1 \mid \overline{v_2} = (\alpha_1 + \beta_1) \mid \overline{v_1};\\
&\xi_1 \mid d\gamma + \gamma_1 \mid \delta\xi = 0,\\
&\xi_1 \mid d\rho_3 + \gamma_1 \mid d\rho = \xi_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \xi_1 \mid \overline{v_3} + \gamma_1 \mid \overline{v} = \xi_1 \mid \overline{v_2} + \gamma_1 \mid \overline{v_1};\\
&\beta_1 \mid d\rho + \eta_1 \mid d\rho_3 = \beta_1 \mid d\rho_2 + \eta_1 \mid d\rho_1, \qquad \beta_1 \mid \overline{v} + \overline{\eta_1} \mid \overline{v_3} = \beta_1 \mid \overline{v_2} + \eta_1 \mid \overline{v_1};\\
&\alpha_1 \mid d\rho + \theta_1 \mid d\rho_2 = \alpha_1 \mid d\rho_3 + \theta_1 \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v} + \theta_1 \mid \overline{v_2} = \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \theta_1 \mid \overline{v_1}.
\end{aligned}$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit $U_1 = O + \rho$ un point arbitraire du même plan. Avec le point O comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \qquad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1),$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \qquad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1,$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan Σ transporté de la position Σ_1, pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position Σ_2.

Si le plan Σ est transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 ses points A, B, C et U subissent les déplacements $\overline{A_1A_2} = \delta_1$, $\overline{B_1B_2} = \delta_2$, $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et $\overline{U_1U_2} = \delta$, de sorte que avec $U_2 = O + \psi$ pour le plan Σ_2 il vient la relation

$$\begin{aligned}\psi = \rho + \delta &= m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3)\\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3,\end{aligned}$$

ou, avec $m + n + p = 1$,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\{(\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1)\} + p\{(\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1)\},$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_3),$$