DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE $\frac{\pi^2}{\sin^2x\pi}=\sum_{\nu=-\infty}^\infty\frac{1}{{(x+\nu)}^2}$

Autor(en): **Lerch, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6648

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les nombres sont d'une classification très facile, ainsi que les opérations qu'on peut effectuer sur eux, et il me semble que l'étude de cette classification ne serait pas stérile pour tous ceux qui s'en occuperaient.

Ch. BERDELLÉ (Rioz, Haute-Saône).

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}.$$

---

(1) I. UN LEMME. — De la double inégalité bien connue

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi$$

il suit que

$$0 < 1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$0 < 1 + \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 2;$$

d'où en multipliant,

$$0 < 1 - \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} < 4\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

ou, après la division par la quantité

$$\sin^2\varphi = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

(1) $$0 < \frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

En supposant φ obtus, cette double inégalité permet de conclure que la fonction

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

II. — Je pose $\varphi = x\pi$ pour avoir les infinis de la fonction :

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} \tag{2}$$

sous forme simple, et je vais considérer la somme évidemment convergente

$$f_2(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2} \tag{3}$$

qui devient infinie pour les mêmes valeurs que la fonction $f_1(x)$. On voit d'abord que l'on a

$$f_1(x+m) = f_1(x),\ f_2(x+m) = f_2(x),\ (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

puis on s'assure que la différence

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{4}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\right)$ et par conséquent pour tous les x.

En effet, on a

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} + f_3(x),$$

la fonction

$$f_3(x) = \sum_{\nu}{}' \frac{1}{(x+\nu)^2},\ (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

restant finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et la quantité

$$g(x) = \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - \frac{1}{x^2}\right) - f_3(x)$$

devient la différence de deux fonctions qui, dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ restent finies.

Il y a donc une constante positive C telle que partout

$$|g(x)| \leqq C, \tag{5}$$

la valeur spéciale de cette constante n'ayant d'ailleurs aucune importance pour nous.

III. — Si, dans la série (3), on transforme l'indice sommatoire ν en posant

$$\nu = \rho + \mu m \quad (\rho = 0, 1, 2, \ldots m-1 ; \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

où m signifie un entier positif quelconque, il vient

$$f_2(x) = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\rho+m\mu)^2} = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2\left(\frac{x+\rho}{m}+\mu\right)^2}$$

ou bien

$$f_2(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_2\left(\frac{x+\rho}{m}\right). \tag{6}$$

Une équation fonctionnelle toute semblable subsiste pour la fonction

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

mais nous nous bornerons pour l'établir dans le cas particulier de $m = 2^k$, k étant un entier positif quelconque.

On a d'abord

$$\frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_1\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4\cos^2\frac{x\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}\cos^2\frac{x\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = f_1(x),$$

de la sorte que l'équation

$$f_1(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) \tag{7}$$

se trouve vérifiée pour $m = 2$. Admettant qu'elle subsiste pour une valeur m, nous transformerons les termes du second membre en l'employant dans le cas de $m = 2$, ce qui donne

$$f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) = \frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)\right]$$

et il s'ensuit au lieu de (7)

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)$$

ou bien

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\rho=0}^{2m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right)$$

ce qui est la formule (7) écrite avec la valeur $2m$ de l'entier m.

La formule (7) ayant lieu pour $m = 2$, sera vraie, par conséquent, pour $m = 4, 8, 16$, et en général pour $m = 2^k$.

IV. — Les deux formules (6) et (7) ayant lieu pour $m = 2^k$, il s'ensuit pour la fonction

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

la formule de la même forme

$$(8) \qquad g(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} g\left(\frac{x+\rho}{m}\right), \quad (m = 2^k).$$

Puisque pour toute valeur de x l'inégalité (5) a lieu, cette dernière formule permet de conclure

$$|g(x)| < \frac{mC}{m^2} = \frac{C}{m}, \quad (m = 2^k),$$

et il s'ensuit en faisant croître k au delà de toute limite, que l'on a

$$|g(x)| = 0.$$

Ceci vérifie l'équation $f_1(x) = f_2(x)$, ou bien

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

qu'il s'agissait d'établir. Elle fait voir, d'une manière qui me paraît élémentaire et simple, que la fonction $\sin x\pi$ est analytique, ce qui permet d'obtenir son développement suivant les puissances de x sans faire usage du théorème de Taylor-Cauchy.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).