Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DÉFINITIONS GÉNÉRALES EN MATHÉMATIQUES 1
Autor: Poincaré, Henri
Kapitel: Arithmétique.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7561

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nements et nos calculs ? Y a-t-il dans la nature quelque objet familier, qui en est pour ainsi dire l'image indécise et grossière ?

Ce n'est pas tout ; si vous répondez à toutes ces questions d'une manière satisfaisante, nous verrons bien que le nouveau-né avait le droit d'être baptisé ; mais le choix du nom n'est pas non plus arbitraire ; il faut expliquer par quelles analogies on a été guidé et que si l'on a donné des noms analogues à des choses différentes, ces choses, du moins, ne diffèrent que par la matière et se rapprochent par la forme ; que leurs propriétés sont analogues et pour ainsi dire parallèles.

C'est à ce prix qu'on pourra satisfaire toutes les tendances. Si l'énoncé est assez correct pour plaire au logicien, la justification contentera l'intuitif. Mais il y a mieux à faire encore : toutes les fois que cela sera possible, la justification précédera l'énoncé et le préparera ; on sera conduit à l'énoncé général par l'étude de quelques exemples particuliers.

Autre chose encore ; chacune des parties de l'énoncé d'une définition a pour but de distinguer l'objet à définir d'une classe d'autres objets voisins. La définition ne sera comprise que quand vous aurez montré, non seulement l'objet défini, mais les objets voisins dont il convient de le distinguer, que vous aurez fait saisir la différence et que vous aurez ajouté explicitement : c'est pour cela qu'en énonçant la définition j'ai dit ceci ou cela.

Mais il est temps de sortir des généralités et d'examiner comment les principes un peu abstraits que je viens d'exposer peuvent être appliqués en arithmétique, en géométrie, en analyse et en mécanique.

Arithmétique.

12. On n'a pas à définir le nombre entier ; en revanche on définit d'ordinaire les opérations sur les nombres entiers ; je crois que les élèves apprennent ces définitions par cœur et qu'ils n'y attachent aucun sens. Il y a à cela deux raisons : d'abord on les leur fait apprendre trop tôt, quand leur esprit

n'en éprouve encore aucun besoin ; puis ces définitions ne sont pas satisfaisantes au point de vue logique. Pour l'addition on ne saurait en trouver une bonne, tout simplement parce qu'il faut s'arrêter et qu'on ne saurait tout définir. Ce n'est pas définir l'addition que de dire qu'elle consiste à ajouter. Tout ce qu'on peut faire c'est de partir d'un certain nombre d'exemples concrets et de dire : l'opération que nous venons de faire s'appelle addition.

Pour la soustraction, c'est autre chose ; on peut la définir logiquement comme l'opération inverse de l'addition ; mais est-ce par là qu'il faut commencer ? Là aussi il faut débuter par des exemples, montrer sur ces exemples la réciprocité des deux opérations ; la définition sera ainsi préparée et justifiée.

De même encore pour la multiplication ; on prendra un problème particulier ; on montrera qu'on peut le résoudre en additionnant plusieurs nombres égaux entre eux ; on fera voir ensuite qu'on arrive plus vite au résultat par une multiplication, opération que les élèves savent déjà faire par routine et la définition logique sortira de là tout naturellement.

On définira la division comme l'opération inverse de la multiplication ; mais on commencera par un exemple emprunté à la notion familière de partage et on montrera sur cet exemple que la multiplication reproduit le dividende.

13. J'ai déjà parlé des fractions ; j'ai dit qu'on débute par la tarte, et on a raison ; c'est bien par là qu'il faut commencer. Un peu plus tard, on poussera l'abstraction plus loin et on introduira la grandeur continue qui a pour prototype la longueur ; il faut montrer (je dis montrer, montrer aux yeux et non pas démontrer bien entendu) qu'elle est divisible à l'infini, et le reste ira tout seul. Quant aux définitions plus subtiles, à celles qui sont purement arithmétiques, il faut les abandonner à l'enseignement supérieur, s'il en veut.

Restent les opérations sur les fractions. Il n'y a de difficulté que pour la multiplication. Le mieux est d'exposer d'abord la théorie des proportions, c'est d'elle seulement que pourra sortir une définition logique ; mais pour faire accepter les définitions que l'on rencontre au début de cette théorie,

il faut les préparer par de nombreux exemples, empruntés à des problèmes classiques de règles de trois, où l'on aura soin d'introduire des données fractionnaires. On ne craindra pas non plus de familiariser les élèves avec la notion de proportion par des images géométriques, soit en faisant appel à leurs souvenirs s'ils ont déjà fait de la géométrie, soit en ayant recours à l'intuition directe, s'ils n'en ont pas fait, ce qui les préparera d'ailleurs à en faire. J'ajouterai, enfin, qu'après avoir défini la multiplication des fractions, il faut justifier cette définition en démontrant qu'elle est commutative, associative et distributive, et en faisant bien remarquer aux auditeurs qu'on fait cette constatation pour justifier la définition.

14. Pour définir le nombre incommensurable, il faut encore partir de la notion de grandeur continue et, parmi ces grandeurs, choisir un exemple, qui ne peut être que la longueur. On montrera que certaines longueurs peuvent s'exprimer par des nombres commensurables ; que d'autres ne le peuvent pas, mais sont liées aux premières par des relations d'inégalité. Vous savez comment ces inégalités permettent de définir les rapports incommensurables de sorte qu'on sera tout naturellement conduit à la définition du nombre incommensurable. Il sera bon de choisir un exemple où l'impossibilité de trouver une commune mesure puisse se démontrer aisément, tel l'exemple classique de $\sqrt{2}$.

Pour les opérations sur les nombres incommensurables, il faut en justifier les définitions de deux manières ; d'abord au point de vue logique en montrant qu'elles satisfont aux mêmes règles que celles des nombres entiers ; et ensuite par des images concrètes que l'on pourra emprunter à la géométrie. Elles ne sont pas difficiles à trouver. Il y a dans le livre de Hilbert tout un chapitre qui est une véritable arithmétique illustrée. J'ai fait tout à l'heure mes réserves sur ce livre, mais il y a beaucoup à y prendre. Du reste, comme on ne doit définir le nombre incommensurable qu'à des élèves déjà avancés, ils comprendront ces images tout de suite.

15. Passons aux nombres négatifs ; ici il faut plus de précaution. On multipliera d'abord les exemples de grandeurs sus-

ceptibles de changer de signe, comme les segments, les angles, le temps, la température, et on fera sur ces exemples des exercices d'addition et de soustraction. Le thermomètre est à 4 degrés au-dessous de zéro, il monte ou il descend de 6 degrés, que devient la température ? etc. Ainsi préparée, la définition des membres négatifs, celle de leur addition et de leur soustraction, sera facilement acceptée. Celle de la multiplication se réduit en définitive à la règle des signes ; cette règle sera comprise, si vous la justifiez de deux manières : 1° logiquement, en montrant qu'elle satisfait aux lois de commutativité et de distributivité ; 2° par des exemples concrets ; et de ces exemples j'en voudrais de deux sortes : d'abord des exemples géométriques puisés dans la théorie des proportions et de la similitude et qui seront la suite de ceux que l'on aura vus à propos des incommensurables ; et puis des exemples empruntés aux mouvements uniformes ; ce sont les plus propres à donner une raison concrète de la règle des signes.

On voit quel rôle jouent dans tout ceci les images géométriques ; et ce rôle est justifié par la philosophie et l'histoire de la science. Si l'arithmétique était restée pure de tout mélange avec la géométrie, elle n'aurait connu que le nombre entier ; c'est pour s'adapter aux besoins de la géométrie qu'elle a inventé autre chose.

Géométrie.

16. En géométrie nous rencontrons d'abord la notion de ligne droite. Peut-on définir la ligne droite ? La définition connue, le plus court chemin d'un point à un autre ne me satisfait guère. Je partirais tout simplement de la *règle* et je montrerais d'abord à l'élève comment on peut vérifier une règle par retournement ; cette vérification est la vraie définition de la ligne droite ; la ligne droite est un axe de rotation. On lui montrerait ensuite à vérifier la règle par glissement et on aurait une des propriétés les plus importantes de la ligne droite. Quant à cette autre propriété d'être le plus court chemin d'un point à un autre, c'est un théorème qui peut