Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DÉFINITIONS GÉNÉRALES EN MATHÉMATIQUES 1
Autor: Poincaré, Henri
Kapitel: Géométrie.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7561

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ceptibles de changer de signe, comme les segments, les angles, le temps, la température, et on fera sur ces exemples des exercices d'addition et de soustraction. Le thermomètre est à 4 degrés au-dessous de zéro, il monte ou il descend de 6 degrés, que devient la température ? etc. Ainsi préparée, la définition des membres négatifs, celle de leur addition et de leur soustraction, sera facilement acceptée. Celle de la multiplication se réduit en définitive à la règle des signes ; cette règle sera comprise, si vous la justifiez de deux manières : 1° logiquement, en montrant qu'elle satisfait aux lois de commutativité et de distributivité ; 2° par des exemples concrets ; et de ces exemples j'en voudrais de deux sortes : d'abord des exemples géométriques puisés dans la théorie des proportions et de la similitude et qui seront la suite de ceux que l'on aura vus à propos des incommensurables ; et puis des exemples empruntés aux mouvements uniformes ; ce sont les plus propres à donner une raison concrète de la règle des signes.

On voit quel rôle jouent dans tout ceci les images géométriques ; et ce rôle est justifié par la philosophie et l'histoire de la science. Si l'arithmétique était restée pure de tout mélange avec la géométrie, elle n'aurait connu que le nombre entier ; c'est pour s'adapter aux besoins de la géométrie qu'elle a inventé autre chose.

Géométrie.

16. En géométrie nous rencontrons d'abord la notion de ligne droite. Peut-on définir la ligne droite ? La définition connue, le plus court chemin d'un point à un autre ne me satisfait guère. Je partirais tout simplement de la *règle* et je montrerais d'abord à l'élève comment on peut vérifier une règle par retournement ; cette vérification est la vraie définition de la ligne droite ; la ligne droite est un axe de rotation. On lui montrerait ensuite à vérifier la règle par glissement et on aurait une des propriétés les plus importantes de la ligne droite. Quant à cette autre propriété d'être le plus court chemin d'un point à un autre, c'est un théorème qui peut

être démontré apodictiquement, mais la démonstration est trop délicate pour pouvoir trouver place dans l'enseignement secondaire. Il vaudra mieux montrer qu'une règle préalablement vérifiée s'applique sur un fil tendu. Il ne faut pas redouter, en présence de difficultés analogues, de multiplier les axiomes, en les justifiant par des expériences grossières.

Ces axiomes, il faut bien en admettre, et si l'on en admet un peu plus qu'il n'est strictement nécessaire, le mal n'est pas bien grand ; l'essentiel est d'apprendre à raisonner juste sur les axiomes une fois admis. L'oncle Sarcey qui aimait à se répéter disait souvent qu'au théâtre le spectateur accepte volontiers tous les postulats qu'on lui impose au début, mais qu'une fois le rideau levé, il devient intransigeant sur la logique. Eh bien, c'est la même chose en mathématiques.

Pour le cercle, on peut partir du compas ; les élèves reconnaîtront du premier coup la courbe tracée ; on leur fera observer ensuite que la distance des deux pointes de l'instrument reste constante, que l'une de ces pointes est fixe et l'autre mobile, et on sera ainsi amené naturellement à la définition logique.

La définition du plan implique un axiome et il ne faut pas le dissimuler. Qu'on prenne une planche à dessin et que l'on fasse remarquer qu'une règle mobile s'applique constamment sur cette planche et cela en conservant deux degrés de liberté. On comparerait avec le cylindre et le cône, surfaces sur lesquelles on ne saurait appliquer une droite à moins de ne lui laisser qu'un seul degré de liberté ; puis, on prendrait trois planches à dessin; on montrerait d'abord qu'elles peuvent glisser en restant appliquées l'une sur l'autre et cela avec 3 degrés de liberté ; et enfin pour distinguer le plan de la sphère, que deux de ces planches, applicables sur une troisième, sont applicables l'une sur l'autre.

Peut-être vous étonnerez-vous de cet incessant emploi d'instruments mobiles ; ce n'est pas là un grossier artifice, et c'est beaucoup plus philosophique qu'on ne le croit d'abord. Qu'est-ce que la géométrie pour le philosophe ? C'est l'étude d'un groupe, et de quel groupe ? de celui des mouvements

des corps solides. Comment alors définir ce groupe sans faire mouvoir quelques corps solides ?

17. Devons-nous conserver la définition classique des parallèles et dire qu'on appelle ainsi deux droites qui, situées dans le même plan, ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge ? Non, parce que cette définition est négative, parce qu'elle est inverifiable par l'expérience et ne saurait en conséquence être regardée comme une donnée immédiate de l'intuition. Non, surtout, parce qu'elle est totalement étrangère à la notion de groupe, à la considération du mouvement des corps solides qui est, comme je l'ai dit, la véritable source de la géométrie. Ne vaudrait-il pas mieux définir d'abord la translation rectiligne d'une figure invariable, comme un mouvement où tous les points de cette figure ont des trajectoires rectilignes ; montrer qu'une semblable translation est possible, en faisant glisser une équerre sur une règle ? De cette constatation expérimentale, érigée en axiome, il serait aisé de faire sortir la notion de parallèle et le postulatum d'Euclide lui-même.

Pour le troisième livre, je ne craindrais pas de donner à l'homothétie le pas sur la similitude et de considérer presque au début la transformation homothétique dans toute sa généralité. Dans l'exposé des théories géométriques, il faut éviter que les théorèmes apparaissent comme isolés les uns des autres et faire bien voir le fil qui les relie. Or, chacun des livres de la géométrie est l'étude d'un groupe de transformations ; les théorèmes ne se succèdent pas au hasard ; ils se succèdent dans un ordre qui est toujours le même : si vous me permettez d'employer un langage très différent de celui qui conviendrait à l'enseignement, il faut toujours déterminer la structure du groupe et ses invariants. C'est donc ce groupe qui est le lien apparent ou caché de tous les théorèmes d'un même livre ; sans prononcer ce grand mot de groupe, il est facile de la laisser entrevoir. Dans les livres précédents, nous n'envisagions que le groupe des déplacements d'un corps solide ; dans le troisième livre on aborde le groupe des homothéties et celui des similitudes ; il vaut mieux commencer par le premier qui est le plus simple. L'emploi du panto-

graphe donnera un exemple concret de transformation homothétique qui pénétrera facilement dans l'esprit des jeunes gens et y restera.

J'ai dit que la plupart des définitions mathématiques étaient de véritables constructions. Dès lors ne convient-il pas de faire la construction d'abord, de l'exécuter devant les élèves, ou mieux de la leur faire exécuter de façon à préparer la définition ?

18. Est-ce maintenant qu'il faut parler des volumes et des surfaces ? C'est trop tôt, puisque pour comprendre la définition logique il faut savoir le calcul intégral ; ce n'est pas trop tôt pourtant puisque nous arrivons au quatrième livre.

Que faire alors ? il faut faire comme on a toujours fait jusqu'ici ; il faut s'abstenir de toute définition du volume et de la surface ; les enfants croient savoir ce que c'est, et ne réclament rien. On se contentera d'énoncer sous forme d'axiomes ces deux propositions qui sont en réalité une véritable définition : que deux aires, composées de parties égales chacune à chacune, ont même surface ; que la surface d'une partie d'une aire est plus petite que la surface de l'aire totale. Et de même pour les volumes.

Calcul différentiel.

19. Il y a deux manières d'aborder l'étude du calcul différentiel, celle de Lagrange, qui au fond est celle de Newton, et celle de Leibniz. Il faut, bien entendu, connaître l'une et l'autre, mais par laquelle faut-il commencer et à quel moment convient-il de parler pour la première fois de l'une ou de l'autre ? Sur ce point on a beaucoup varié ; de mon temps l'enseignement secondaire ne connaissait que les dérivées, et il n'était question de différentielles qu'à l'Ecole Polytechnique. Depuis, suivant les fluctuations des programmes de l'Ecole Polytechnique, la notation différentielle a envahi les classes de spéciales, puis elle en a été bannie, enfin tout récemment elle en a repris possession. Il faut s'attendre sans doute à de nouveaux flux et à de nouveaux reflux. Mais