III. — Mécanique des systèmes de points matériels.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tion ont des sommes de projections égales sur chacun des trois axes et des sommes de moments égales par rapport à chacun de ces axes. Ce point est trop spécial pour être ici l'objet de quelques développements.

III. — Mécanique des systèmes de points matériels.

D'après les principes énoncés au paragraphe I et pour une première étude sur les systèmes matériels, on considérera ceux-ci comme des ensembles de points matériels exerçant les uns sur les autres des forces répulsives ou attractives, deux à deux égales et contraires sur une même direction, l'action d'un point matériel sur un autre correspondant à une réaction égale et opposée de celui-ci. Les forces mutuelles d'un système sont dites *forces intérieures*. Un système peut être isolé, c'est-à-dire soumis à la seule activité interne; ou, au contraire, il peut être sollicité par des masses extérieures. Celles-ci exercent sur les points du système considéré des forces que l'on nomme *forces extérieures* en raison de leur origine. Ainsi sur chaque point s'exercent des forces intérieures provenant des masses du système et des forces extérieures provenant des masses extérieures ; la résultante de ces forces sur ce point détermine à chaque époque l'accélération de son mouvement ou son état d'équilibre.

Un système est en équilibre si tous ses points matériels sont en équilibre et réciproquement. Dans ce cas, pour chaque point la résultante est nulle ; la somme des projections des forces agissant sur chaque point est nulle sur trois axes. Si le système se compose de n points matériels, $3\,n$ équations sont *nécessaires et suffisantes* pour écrire que le système est en équilibre.

Ce système d'équations peut être remplacé par un autre équivalent, composé de $3n-6$ des équations entre les forces intérieures et les forces extérieures et de 6 équations indépendantes des forces intérieures, satisfaites par les forces extérieures seules, c'est-à-dire provenant du monde extérieur. Ces dernières sont dites *équations générales de l'équilibre*. Leur établissement est intuitif.

Elles se composent de trois équations de projection sur trois axes auxquels on rapporte le système et de trois équations de moments autour de ceux-ci. Les trois premières, qui s'écrivent directement, pourraient être obtenues successivement en additionnant membre à membre les équations de projection sur le même axe relatives à tous les points du système. Les forces intérieures ne s'expriment pas dans le résultat, parce que deux à deux leurs projections sont égales et de signes contraires. Ce serait une grosse faute de dire que les forces intérieures se détruisent.

Les trois équations relatives aux moments, que l'on écrit directement, pourraient être obtenues par un calcul tout aussi simple. On peut écrire que la résultante des forces appliquées en un point matériel est nulle, en écrivant que les sommes de leurs moments autour de trois axes sont nulles séparément. Si donc on additionne membre à membre les équations ainsi obtenues pour tous les points du système et relatives à un même axe, les forces intérieures ne s'expriment pas dans le résultat, parce que deux à deux leurs moments sont égaux et de signes contraires par rapport à un même axe. En opérant ainsi pour chaque axe, on a les trois équations de moments annoncées.

Il y a donc six équations générales de l'équilibre d'un système matériel entre les forces extérieures. On dit : pour qu'un système matériel soit en équilibre, *il est nécessaire* que la somme des projections des forces *extérieures* soit nulle sur chacun de trois axes et que la somme des moments de ces mêmes forces soit nulle autour de chacun de ces axes. On voit qu'elles sont insuffisantes, *indépendamment de toute considération sur la solidité,* puisqu'elles ne sont qu'au nombre de six quel que soit le nombre des points matériels du système.

Dans certains cas, en faisant un choix convenable des axes, certaines de ces équations générales sont identiquement satisfaites. Dans les cas où les forces sont situées dans un plan, par exemple, on prend deux des axes dans le plan et l'on n'a qu'à écrire que les projections des *forces extérieures* sont nulles sur chacun d'eux et que la somme de

leurs moments est nulle par rapport au point de rencontre de ces axes.

Voici un exemple de l'application de ces équations et de l'utilité des vecteurs, que l'on rencontre dans l'étude de nombre de machines, telles que le levier, la poulie et d'autres ; il donne la solution de cette question : Quelles conditions doivent remplir, sur un système matériel en équilibre, trois seules forces $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ provenant de masses extérieures et appliquées en trois points A, B, C du système ? 1° Ces trois forces doivent être dans un même plan ; on vérifie que la force $A\alpha$, par exemple, est dans le plan ABC en prenant les moments par rapport à l'axe BC. Ce moment doit être nul puisque le système est en équilibre et que les forces $B\beta$, $C\gamma$ rencontrent l'axe ; donc la direction de la force $A\alpha$ rencontre BC. 2° Les directions de ces forces concourent ; on vérifie que la direction de $A\alpha$ passe par le point de concours des directions de $B\beta$ et $C\gamma$ en prenant les moments par rapport à ce point de concours. — Le point de concours peut être à l'infini, alors les trois directions des forces sont parallèles ; passons. — 3° Des vecteurs équipollents aux forces portés bout à bout doivent former un triangle ; on le vérifie en constatant que la somme des projections des forces sur deux axes pris dans le plan est nulle pour chacun. — De ces conditions on déduit dans chaque cas une figure géométrique résolvant les questions relatives à trois forces extérieures appliquées seules à un solide.

Plus généralement on peut donner une forme géométrique aux conditions générales de l'équilibre. Il suffit de considérer un système de vecteurs de mêmes longueurs, directions et sens respectifs que les forces extérieures appliquées au système. La traduction géométrique des équations générales de l'équilibre conduit à ceci : Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il est nécessaire (mais non suffisant) que les vecteurs substitués aux forces *extérieures* appliquées au système aient une résultante générale nulle et un moment résultant nul par rapport à un point quelconque de l'espace. — De cet énoncé dérivent les constructions que

les ingénieurs utilisent sous le nom de polygones funiculaires.

Dans l'exemple précédent la construction revient à considérer que l'un quelconque des vecteurs est égal et directement opposé à la résultante des deux autres. Cela exige en effet que les vecteurs soient dans un même plan, que leurs directions concourent et que les vecteurs équipollents forment un triangle.

Si les conditions de l'équilibre ne sont jamais suffisantes, au sens rigoureux de ce terme, quelle est leur utilité dans la résolution des questions de la Mécanique ? Soit un système matériel en équilibre sous l'action de forces exercées par des masses en contact et de forces exercées par des masses qui agissent à distance, suivant l'hypothèse courante ; ces forces satisfont aux conditions générales de l'équilibre. — Un tel système est analogue à un pont surchargé ; celui-ci est soumis aux réactions de ses points d'appui, actions de masses en contact, et à l'attraction de la terre, action à distance. — Si l'on modifie les forces s'exerçant à distance ou si l'on ajoute des contacts, le système se déforme ; les anciennes réactions sont modifiées ; c'est ce qu'indiquent les expériences personnelles et journalières de chacun. Il y a donc une relation entre la forme du système et les forces extérieures qui le sollicitent ; on est conduit à faire l'hypothèse que les forces mutuelles d'un système sont fonction des coordonnées de ses points, c'est-à-dire de leurs distances mutuelles. L'établissement des relations entre les déformations et les forces extérieures est le fait de l'élasticité ; mais il y a un très grand nombre de questions qu'il est possible de résoudre, avec une approximation suffisante, par les seules conditions générales de l'équilibre. Le caractère général de ces questions, il est bon de le dire formellement, ne consiste pas dans la solidité apparente plus ou moins grande des systèmes matériels, mais dans la possibilité qu'ils peuvent avoir de se déformer librement sous l'action des forces extérieures.

Avant d'aller plus loin, il faut définir ce que l'on entend

par réaction d'un système sur un autre, d'un corps solide sur un autre, pour fixer les idées. M. Rouché donne le nom de réaction simple à toute réaction dont la ligne d'action, c'est-à-dire la direction, est déterminée. Ainsi la réaction d'un appui poli sur lequel un corps solide repose par un de ses points est une réaction simple ; la réaction qui fixe géométriquement un point matériel d'un système plan en l'obligeant à se tenir sur deux lignes matérielles polies dans le plan, c'est-à-dire de se trouver en un point commun à ces lignes, équivaut à deux réactions simples ; la fixité géométrique d'un point matériel d'un système quelconque dans l'espace, ou l'obligation imposée à ce point de se tenir sur trois surfaces polies, c'est-à-dire en un point qui leur est commun, équivaut à trois réactions simples. Cette définition est d'une clarté parfaite ; toute son utilité apparaît si l'on fait attention aux moyens techniques de produire des liaisons : appuis réalisés par des couteaux, par des coussinets et des tourillons, par des contacts de surfaces ; assemblages fixes ; articulations réalisées par des boulons ; distances maintenues par des tiges ou par des liens flexibles. — Le frottement peut être considéré par point d'appui comme une réaction simple dans le plan et une double dans l'espace.

Maintenant on peut poser la règle suivante : tant que le nombre des réactions simples pour un système matériel plan ne dépasse pas trois, et pour un système matériel quelconque ne dépasse pas cinq, on peut en général appliquer par approximation les conditions générales de l'équilibre, c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte des déformations ; pour cela il faut qu'elles soient suffisamment petites pour n'avoir pas d'importance dans la question ; ce qui est réalisé dans une balance dont le fléau est convenablement construit ; ce qui n'a pas lieu pour une lunette astronomique dont les flexions altèrent les indications. Dans ce dernier cas, l'étude du système doit être *complétée* par celle de ses déformations.

D'autre part, la solidité peut souvent être suffisante pour que l'on considère approximativement un corps comme géométriquement identique à lui-même dans toutes ses positions dans l'espace ; mais pour que l'on puisse étudier, avec

une exactitude suffisante, son état mécanique externe à l'aide des équations générales de l'équilibre, il faut qu'il puisse se déformer librement. Dès qu'un système matériel quelconque a deux ou plusieurs points géométriquement fixes, il n'est plus à *libre déformation* puisque les distances de ces points sont invariables ; les réactions et les autres forces extérieures doivent satisfaire aux équations de l'équilibre, mais celles-ci ne sont pas en nombre suffisant pour que l'on puisse *commencer* l'étude, même approximativement, sans le secours de l'élasticité.

En effet, soit un système matériel plan, et pour fixer les idées un arc ayant une extrémité articulée, ce qui équivaut à deux réactions simples, et l'autre extrémité A appuyée sur une ligne matérielle polie dans son plan, ce qui équivaut à une condition simple. Il est soumis à trois conditions simples et peut se déformer librement sous l'action des forces extérieures auxquelles on le soumet, car le point A se déplace librement sur son appui. Tant que les déformations sont négligeables, et pourvu que l'arc ne casse pas, on pourra approximativement calculer les réactions par les trois équations générales de l'équilibre relatives aux forces situées dans un plan. Or, l'arc étant chargé, pour ramener le point A à la position primitive qu'il occupait avant l'action des charges, des forces extérieures, il faut le soumettre à une réaction convenable, qui a une grandeur comparable à celles des autres forces extérieures, alors même que le déplacement est faible. Cette réaction tient sa place dans les conditions de l'équilibre et modifie le rôle des autres forces extérieures ; de plus, les réactions dans ce cas sont au nombre de quatre et l'on n'a que trois équations générales de l'équilibre. On ne peut donc les déterminer pour des forces extérieures données sans emprunter une équation de plus à la théorie de l'élasticité. Au lieu de supposer que le point A est libre d'abord de glisser sur une ligne et est ramené ensuite à sa position première, on peut supposer que l'arc est articulé en A comme à l'autre extrémité, et les mêmes conclusions s'imposent.

Les machines simples, considérées comme des systèmes matériels dans le plan, n'ont de mouvement possible (au dé-

part) qu'une rotation autour d'un point géométrique. On dit qu'elles ont un point fixe. Elles sont constituées par des masses relativement considérables, leurs déformations sont excessivement faibles et sans importance pour l'usage auquel elles sont destinées. On résoudra par les conditions générales de l'équilibre les questions concernant les forces extérieures qui y sont appliquées.

La marche à suivre pour étudier l'équilibre d'un système matériel consiste à appliquer les conditions générales à toutes les forces extérieures appliquées à l'ensemble, y compris les réactions des appuis ou des liaisons de cet ensemble; puis à étudier l'équilibre de parties détachées, auxquelles, pour tenir compte de leurs liaisons avec le reste, on applique des forces de réaction convenables, qui, forces intérieures dans l'ensemble du système, deviennent forces extérieures sur les parties détachées.

Ce qui vient d'être dit pour l'équilibre s'applique au mouvement, et les questions où les déformations sont libres et négligeables peuvent être traitées sans le secours de l'élasticité.

Lorsque l'expérience professionnelle fait connaître les idées singulières, en dehors de toute hypothèse reçue, en dehors de toute évidence, qui naissent dans l'esprit des débutants à propos des questions les plus simples, la conviction s'impose qu'il faut employer un langage en rapport avec l'application. Il ne faut pas, dans l'intention vaine d'éviter des idées fausses et de rapprocher les débutants de la vérité, être obligé d'accompagner des énoncés abstraits de considérations dites pratiques et qui semblent être des hors-d'œuvres, tandis qu'elles sont le fond de la Mécanique. Un enseignement modeste et basé sur la réalité, conduit plus simplement, plus sûrement, plus rapidement au but. La grosse difficulté signalée est relative à l'établissement des conditions générales de l'équilibre. Elle n'existe véritablement pas ; ces conditions se déduisent intuitivement de celles de l'équilibre du point matériel.

Al. Gouilly (Neuilly s. Seine),
Ingénieur des Arts et Manufactures.