UN SYMBOLE D'OPÉRATION DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Autor(en): **Brand, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7574

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UN SYMBOLE D'OPÉRATION

DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Soit u une fonction de la variable x.

On représente le rapport de la dérivée première de la fonction u à la fonction elle-même par $\underset{u}{\triangle}$, et le rapport de la dérivée k^e de u à la fonction par $\underset{u}{\triangle}^k$.

1° Si l'on a un produit uv de deux fonctions de x, on établit immédiatement la relation symbolique

$$\underset{u,v}{\triangle} = \underset{u}{\triangle} + \underset{v}{\triangle} \cdot \tag{1}$$

2° La formule se généralise aisément et on obtient

$$\underset{u_1 u_2 \ldots u_n}{\triangle} = \sum_{i=1}^{i=n} \underset{u_i}{\triangle} \cdot \tag{2}$$

3° La formule de Leibniz, pour le développement de la dérivée d'un ordre quelconque d'un produit de deux fonctions u et v de x, conduit à

$$\underset{uv}{\triangle}^k = \left(\underset{u}{\triangle} + \underset{v}{\triangle}\right)^k, \tag{3}$$

k devant être considéré comme un véritable exposant dans le second membre.

4° On peut généraliser la relation (3) et écrire

$$\underset{u_1 u_2 \ldots u_n}{\triangle}^k = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \underset{u_i}{\triangle}\right)^k = \Sigma \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \ldots P_\nu} \underset{u_1}{\triangle}^\alpha \underset{u_2}{\triangle}^\beta \ldots \underset{u_n}{\triangle}^\nu, \tag{4}$$

P_k, P_α, P_β, ... P_ν représentant les nombres de permutations simples de k, α, β. ... ν objets, et le signe Σ du 3e membre

s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots \nu$ satisfaisant à la relation

$$\alpha + \beta + \ldots + \nu = k .$$

Application à la dérivée d'un déterminant. — Soit A un déterminant dont les éléments soient fonctions de x.

On démontre facilement[1] que, si A est représenté par son terme principal $(a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$, la dérivée première de A s'obtient en considérant le terme principal comme un produit auquel on applique la règle de dérivation et en prenant les différents termes de la dérivée de $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ comme termes principaux d'une suite de déterminants.

On a alors

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d(a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})}{dx} .$$

A cause des règles de dérivation d'une somme et d'un produit, on conclut la formule

$$\frac{d^k A}{dx^k} = \frac{d^k(a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})}{dx^k} ,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} \underset{a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}}{\triangle^k} ,$$

et, en vertu de la relation (4),

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} \Sigma \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \ldots P_\nu} \underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha} \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta} \ldots \underset{a_{n,n}}{\triangle^\nu} .$$

On substitue aux symboles $\underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha}, \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta}, \ldots, \underset{a_{n,n}}{\triangle^\nu}$ leurs valeurs respectives, on remplace le signe Σ par le développement qu'il représente, on multiplie par le produit $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ et on simplifie. Le résultat donne une suite de termes qui

[1] Voir ma Note, *Journal de Mathém. spéc.* de Longchamps; 1896, p. 102.

doivent être considérés comme les termes principaux des déterminants dont la somme est égale à la dérivée k^e du déterminant primitif A.

Exemple : Soit $A = (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4})$.

On a

$$\frac{d^3A}{dx^3} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} \Sigma \frac{P_3}{P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta} \underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha} \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta} \underset{a_{3,3}}{\triangle^\gamma} \underset{a_{4,4}}{\triangle^\delta}.$$

En faisant les opérations indiquées précédemment, on obtiendra, en n'écrivant que le 1er déterminant de chaque groupe et employant pour les dérivées des éléments la notation de Lagrange,

$$\frac{d^3A}{dx^3} = \begin{vmatrix} a'''_{1,1} & a'''_{1,2} & a'''_{1,3} & a'''_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ 3. \begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} & a''_{1,4} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ 6. \begin{vmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} & a'_{1,4} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} \\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3} & a'_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \ldots$$

E. Brand (Bruxelles).