# SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES

Autor(en): **Baire, René**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7555

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES

Il est permis de penser que la théorie élémentaire des séries, telle qu'elle est enseignée dans les cours de mathématiques spéciales, présente, peut-être par la force des choses, un caractère artificiel et disparate. L'exposé de cette théorie consiste surtout à passer en revue un certain nombre de caractères de convergence ou de divergence, sans qu'aucun lien logique apparaisse entre ces différents énoncés. L'élève à qui on a remis ces outils entre les mains, une fois en présence d'une application à traiter, en est réduit à les essayer tour à tour, à peu près au hasard ; il est assez remarquable même que les caractères qui réussissent le moins souvent, comme la règle de d'Alembert, sont justement ceux que les élèves sont le plus portés à employer.

Je me propose de montrer, dans les considérations qui suivent, comment on peut, sans sortir du terrain élémentaire, diriger l'application de la théorie d'une manière plus raisonnée et éviter, dans bien des cas, des tâtonnements inutiles.

Je supposerai qu'il s'agit de séries à termes positifs, et je m'occuperai surtout des caractères de *convergence*.

Remarquons tout d'abord que l'étude d'un caractère de convergence et de divergence consiste le plus souvent en ceci : on forme une certaine fonction du rang $n$, soit $f(n)$, on cherche ce que devient cette fonction quand $n$ croît indéfiniment ; si elle satisfait à certaines conditions d'inégalité, on en déduit la convergence ou la divergence, la démonstration se faisant par comparaison avec une certaine série ; de sorte qu'en dernière analyse, si un caractère de convergence réussit pour la série $(u)$, c'est parce qu'il permet de définir une

série $(v)$, telle qu'on a $u_n < v_n$ pour $n$ assez grand, ce que nous exprimerons en disant que $(u)$ *décroît plus vite que* $(v)$. Ainsi la règle de d'Alembert $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1\right)$ emploie comme série de comparaison une progression géométrique décroissante, la règle $n^\mu u_n (\mu > 1)$ emploie la série $\frac{1}{n^\mu}$, etc...

Cela étant, considérons les séries de comparaison les plus employées, et *comparons-les entre elles*. Soit, par exemple, les deux séries : $\alpha_n = Ak^n (k < 1)$ et $\beta_n = \frac{B}{n^\mu} (\mu > 1)$. On reconnaît que $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tend vers 0, car $k^n \times n^\mu$, si $k < 1$, tend vers 0.

C'est là un fait bien connu, qui s'exprime, comme on sait, en disant que la progression géométrique décroît plus vite que la série $\frac{1}{n^\mu}$. Mais il est utile d'en déduire les conséquences suivantes :

Si $(u)$ décroît plus vite que $(\alpha)$, elle décroît à fortiori plus vite que $(\beta)$ ; mais il peut exister des séries décroissant plus vite que $(\beta)$ sans décroître plus vite que $(\alpha)$. Par suite, au point de vue de la recherche de la convergence, *la comparaison avec* $(\beta)$ *est plus avantageuse qu'avec* $(\alpha)$, car toutes les fois que la comparaison avec $(\alpha)$ s'applique, il en est de même de la comparaison avec $(\beta)$, sans que la réciproque soit vraie. On peut de la même manière comparer entre elles les différentes séries $\frac{1}{n^\mu}$ quand $\mu$ varie, les séries $\frac{1}{n(\mathrm{L}\mu)^\mu}$ etc.

Un résultat très simple, mais très frappant, se déduit de ce qui précède. Si la règle de d'Alembert $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1\right)$ ou celle de Cauchy $(\sqrt[n]{u_n} < k < 1)$ s'applique à une série, *la règle* $n^2 u_n$ (ou, plus généralement, $n^\mu u_n$, quel que soit $\mu > 1$), *s'y applique aussi*. En effet, d'après l'hypothèse, on peut démontrer qu'on a : $u_n < Ak^n$ ; il en résulte que $n^\mu u_n$

tend vers 0. Il est bien entendu que pour l'instant nous faisons abstraction des difficultés que peut présenter la constatation de ces différents faits pour l'exemple qui sera donné. Il s'agit en quelque sorte d'un fait considéré intrinséquement, d'une comparaison *in abstracto*.

Voici maintenant un second point. Certains caractères de convergence emploient la même série de comparaison, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ; quel est celui des deux qui réussira le plus souvent ? On démontre généralement dans les cours que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ a la même limite. Mais on peut obtenir des résultats plus complets ; on peut donner, en effet, le théorème suivant.

Soit une série $(u)$. Si, parmi toutes les progressions géométriques décroissantes, il en existe une, soit $(v)$, telle que $(u)$ décroît plus vite que $(v)$, $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieur, pour $n$ assez grand, à un nombre plus petit que 1. En effet, d'après l'hypothèse, il existe une série de terme général $v_n = Ak^n (k < 1)$, telle qu'on finit par avoir : $u_n < Ak^n$ ; on en déduit : $\sqrt[n]{u_n} < k\sqrt[n]{A}$ ; le second membre tend vers $k$, donc $\sqrt[n]{u_n}$ devient inférieur à un nombre $k' < 1$.

Ce résultat permet en quelque sorte de dire que *le caractère de Cauchy tire tout le parti possible de la comparaison avec les progressions géométriques.*

Une simple réflexion montre qu'il n'en est pas de même pour la règle de d'Alembert, qui introduit la fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, (*en général plus compliquée que* $u_n$, de même que la dérivée d'une fonction est en général plus compliquée que la fonction, sauf quelques cas). Les quantités $u_n$ peuvent, en effet, devenir infiniment petites, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ayant des valeurs très grandes pour certaines valeurs de $n$.

Les exemples étudiés dans ce qui précède suffisent pour montrer l'importance et l'utilité pratique de la comparaison des différents critères de convergence. On vérifiera de même que la règle de Duhamel, qui sert à compléter la règle de d'Alembert, introduit la comparaison avec une certaine série de la forme $\frac{1}{n^\mu}$, de sorte que si cette règle permet de démontrer la convergence d'une série $(u)$, le caractère $n^\mu u_n$ s'applique aussi à la même série, pour une valeur convenable de $\mu$.

Nous venons d'étudier les différents critères de convergence au point de vue de leur *puissance*, il faut maintenant nous placer à un autre point de vue, celui de leur *commodité*. Par exemple, nous avons fait voir que si, pour une série, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste inférieur à $k < 1$, $n^2 u_n$ tend vers 0 ; mais cela n'empêche pas que, dans certains exemples, il est plus facile de constater le premier fait que le second ; c'est pour ce motif qu'il peut y avoir malgré tout avantage à employer la règle de d'Alembert. Dans quels cas est-il logique d'essayer tel caractère plutôt que tel autre ? Nous pourrons donner une réponse à cette question à la condition de nous borner aux cas les plus usuels.

Tout d'abord un caractère de convergence aura des chances d'être d'autant plus commode que la fonction de $n$ qu'il introduit sera plus simple. D'autre part, ce qu'on doit étudier en dernière analyse, c'est la rapidité avec laquelle $u_n$ tend vers 0 ; pour cela, on met $u_n$ sous forme d'un produit de facteurs, en faisant abstraction de ceux qui restent finis, et portant l'attention sur ceux qui sont infiniment petits. Cela posé, passons en revue les différentes manières dont $n$ entre dans $u_n$ dans les cas les plus fréquents.

1°. Un premier cas est celui où $n$ n'entre qu'*algébriquement* dans $u_n$. (Comme cas plus particulier, $u_n$ est fonction *rationnelle* de $n$). Dans ce cas, $u_n$ est comparable à une expression de la forme $An^\mu$, et l'application des règles relatives à $n^\mu u_n$

donne immédiatement la réponse à la question posée. L'essai de tout autre caractère doit être considéré comme une maladresse.

2°. $n$ entre de la manière précédente, et en outre, en exposant. C'est le cas, par exemple, où il y a un facteur $x^n$. Ici, les fonctions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ contiennent le facteur $x$, qui correspond à ce facteur $x^n$, et est *plus simple que lui* ; il y a des chances pour que ces caractères réussissent.

3°. $n$ entre par des factorielles, par exemple par

$$\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).$$

Ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est tout indiqué, parce que le facteur qui, dans $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, correspond à la factorielle, est la quantité très simple $(\alpha+n)$.

4°. $n$ entre dans $u_n$ par des facteurs irréguliers au point de vue de la variation quand $n$ croît indéfiniment, par exemple par des fonctions trigonométriques telles que $\sin nx$ ; ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est à proscrire complètement. Il y a en général avantage, dans ce cas, à considérer d'abord la série obtenue en supprimant ces facteurs irréguliers ; par exemple, le moyen le plus court de montrer que la série $\frac{\sin^2 nx}{n!}$ est convergente sera de dire qu'on l'obtient en multipliant par des facteurs $< 1$ les termes de la série $\frac{1}{n!}$, dont on démontre la convergence par la règle de d'Alembert.

5°. $n$ entre par $\mathrm{L}n$ ; la fonction $\mathrm{L}n$ croît moins vite qu'une puissance positive quelconque de $n$ ; on se trouve dans des conditions moins avantageuses que dans le cas 1°, en ce qui concerne du moins le facteur logarithmique ; par suite, si les caractères $n^\mu u_n$ échouent, il n'y a pas d'autre

ressource que d'avoir recours aux séries $\frac{1}{n\mathrm{L}n}$, $\frac{1}{n(\mathrm{L}n)^{\mu}}$ $(\mu > 1)$ etc., qui, comme on sait, sont précisément les intermédiaires entre les séries $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^{\mu}}$ $(\mu > 1)$, au point de vue de la rapidité de la convergence ou de la divergence. Moins que jamais, on ne doit ici employer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Nous avons constaté, en résumé, que l'emploi de la règle de d'Alembert est utile dans deux cas, celui où $n$ entre en exposant, et en factorielle. Il est bon de remarquer que c'est précisément le cas des séries qu'on obtient quand on développe en série de Maclaurin, les fonctions simples, $\mathrm{L}(1 + x)$, $(1 + x)^{\mu}$, etc. Mais il n'en est pas moins vrai qu'il s'agit là d'un fait qu'on doit considérer comme exceptionnel.

Il serait facile de compléter l'aperçu qui précède, en ce qui concerne, soit d'autres caractères de convergence, soit des caractères de divergence.

René Baire (Montpellier).