Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES PRINCIPES ANALYTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE
Autor: Combebiac, G.
Kapitel: II ANALYSIS SITUS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7558

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mais la Géométrie s'est enrichie, depuis Euclide, d'un beau domaine, d'où est exclue l'idée de mesure.

On a d'abord établi, au commencement du dernier siècle, sous le nom de *Géométrie de situation* ou *Géométrie projective*, un ensemble de propriétés basées sur la seule idée de ligne droite.

Plus récemment s'est constituée, sous le nom d'*Analysis sitûs,* une doctrine qui s'attache à des propriétés encore plus générales des figures.

Tels sont donc les trois domaines : *Analysis sitûs,* Géométrie projective, Géométrie vulgaire ou métrique, que nous allons voir apparaître par l'introduction de notions de moins en moins générales.

II

ANALYSIS SITUS

Réduction de la géométrie a l'analyse. — Le premier des axiomes qui permettent l'application de l'Analyse algébrique à la Géométrie est le suivant :

A I. *L'espace ponctuel peut être représenté par une variété (ou multiplicité, Mannigfaltigkeit) numérique triple.*

Cet axiome ramène à des idées analytiques les notions de continuité, de ligne, de surface, d'intersection, de contact. Mais rien n'empêche d'associer les idées géométriques aux expressions analytiques correspondantes.

Nous conserverons donc, comme concepts essentiels de la Géométrie, les concepts de point, de continuité, de ligne et de surface, c'est-à-dire ceux qui sont inhérents à l'idée de figure.

Pour pouvoir donner une interprétation géométrique à l'axiome A I, il faudrait concevoir des géométries où cet axiome ne fût pas réalisé.

M. Hilbert[1] a établi une Géométrie, où les points ne constituent pas une variété numérique (Géométrie *non-pascalienne*), mais la théorie ainsi édifiée a une existence pure-

[1] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.*

ment analytique, et les éléments auxquels elle se rapporte ne sont susceptibles de correspondre à aucune idée comparable à celle de point, tout au moins dans l'exemple donné par le savant géomètre.

Coordonnées. — Les trois nombres qui, en vertu de l'axiome AI, représentent un point de l'espace sont appelés ses *coordonnées*.

L'établissement d'un système de coordonnées nécessite évidemment l'intervention d'opérations géométriques, ou « constructions », déterminant la correspondance entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs des trois coordonnées.

A vrai dire, l'on ne voit guère le moyen de définir un système de coordonnées en utilisant uniquement les notions qui se rattachent à l'axiome AI, les constructions géométriques étant toutes basées sur l'emploi des corps solides, dont les propriétés doivent être classées parmi les propriétés métriques.

Mais rien n'empêche d'en admettre la possibilité virtuelle.

Un système de coordonnées x, y, z, une fois défini, on en obtient une infinité d'autres en effectuant des transformations de la forme

$$(1) \qquad x' = \varphi(x,y,z), \quad y' = \psi(x,y,z) \quad z' = \chi(x,y,z,)$$

où φ, ψ et χ sont des fonctions quelconques.

Les équations (1) représentent, à volonté, un changement de coordonnées ou une transformation ponctuelle, c'est-à-dire une opération transformant un point de l'espace en un autre point (avec possibilité de détermination multiple, imaginaire, singulière ou présentant toute autre particularité), de sorte que l'on peut dire indifféremment que telle propriété est indépendante d'un certain changement de coordonnées ou qu'elle est invariante par rapport à la transformation ponctuelle correspondante à ce changement.

Les propriétés qui découlent uniquement de l'axiome AI sont évidemment indépendantes du choix des coordonnées.

On peut encore dire qu'elles sont invariantes dans toute transformation ponctuelle de l'espace. Autrement dit, les

formules analytiques qui les expriment se conservent, lorsqu'on opère sur les coordonnées une transformation (1).

C'est là leur caractéristique, et l'on est tenté, pour cela, de les qualifier de *générales* et de désigner leur ensemble sous le nom de *Géométrie générale*.

Ne se rapportant qu'à un petit nombre de notions — celles que nous avons énoncées plus haut —, elles ne peuvent qu'être en nombre restreint.

Elles sont d'ailleurs, le plus souvent, fort simples.

Elles sont d'un ordre plus général que celles qui constituent proprement l'*Analysis sitûs,* dont nous allons maintenant nous occuper.

Observons que la notion de transformation ponctuelle, que nous venons d'introduire analytiquement, constitue un concept géométrique dont l'importance s'affirmera au cours de cette étude et qui a sa place, en Géométrie générale, à côté des concepts fondamentaux de point, de ligne et de surface.

Dans une transformation ponctuelle d'une figure, les points, les lignes, les surfaces, restent respectivement points, lignes, surfaces.

Degré de connexion de l'espace. — Les propriétés constituant l'*Analysis sitûs* peuvent être également ramenées à des propriétés analytiques, moyennant un complément à l'axiome A I.

Nous le donnerons sous une forme telle que l'axiome complémentaire comprendra le premier, cette dérogation au principe de l'indépendance des axiomes ne présentant pas grand inconvénient et nous permettant d'éviter des complications de langage.

A II. *On peut établir une correspondance univoque entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs réelles et déterminées de trois nombres.*

Cet axiome peut encore s'énoncer :

(A II)' *L'espace est une variété numérique triple et triplement infinie à simple connexion.*

Cet axiome particularise l'espace parmi les variétés triples.

Nous signalerons brièvement les propriétés que peuvent

présenter, au point de vue où nous nous trouvons, les variétés numériques.

L'ensemble de tous les systèmes de valeurs de n nombres constitue la variété n-uple type.

Mais on peut concevoir des variétés non susceptibles de correspondre, d'une manière univoque, à ces variétés types, et en établir une classification d'après les particularités que peut présenter la correspondance.

Fixons d'abord la terminologie pour tout le cours de cette étude, en observant que, dans le qualificatif « continue », appliqué à une variété géométrique : ligne, surface ou volume, nous comprenons toujours « non limitée », de sorte qu'une variété continue sera dite fermée ou ouverte, ce dernier qualificatif indiquant qu'elle s'étend à l'infini.

Les lignes sont des variétés simples, et les seules lignes susceptibles d'une correspondance univoque avec la série constituée par tous les nombres positifs et négatifs sont les lignes continues, sans points multiples et ouvertes, à l'exclusion notamment des lignes fermées.

De même, les seules surfaces (variétés doublement étendues) qui satisfont à la condition analogue sont les surfaces continues, simplement connexes, et doublement infinies, ce dernier qualificatif ayant pour but l'exclusion des surfaces fermées et des surfaces tubulaires (ou cylindroïdes), celles-ci pouvant aussi être dites « simplement infinies ».

Sur ces surfaces seules (les plans par exemple), il est possible d'établir des systèmes de coordonnées rigoureusement univoques.

Sur une surface simplement connexe, non tubulaire, une ligne fermée est rencontrée en un nombre pair de points par une ligne continue, fermée ou ouverte.

Le degré de connexion d'une surface continue (fermée ou ouverte) entraîne des propriétés correspondantes pour les deux domaines qu'elle détermine généralement dans l'espace. Mais ce degré peut être déterminé comme propriété intrinsèque de la surface, sans faire appel à la troisième dimension, en définissant cette surface comme variété numérique double.

Il en est de même en ce qui concerne les propriétés par rapport à l'infini, dont il vient d'être question.

Il existe également un degré de connexion pour les variétés triples sans qu'il soit besoin de faire appel, pour en avoir la notion, à une quatrième dimension.

Enfin on peut également distinguer, parmi les variétés triples et en se bornant aux variétés simplement connexes, les variétés fermées et les variétés simplement, doublement et triplement infinies.

Nous n'envisagerons pas l'hypothèse suivant laquelle l'espace serait une variété numérique à connexion multiple. Mais nous n'exclurons pas celle suivant laquelle l'espace serait une variété fermée, malgré les difficultés de conception qu'elle comporte, tenant notamment à ce que cette hypothèse entraîne la non-existence de lignes infinies.

Mais que peut-on entendre par existence ou non-existence d'une conception idéale ?

Comme on ne voit pas que l'affirmation ou la négation de cette hypothèse soit susceptible de conséquences objectives, il semble que l'on doive admettre que nous demeurons libres de concevoir l'espace ponctuel comme une variété ouverte ou comme une variété fermée.

Coordonnées univoques. — Les systèmes de coordonnées qui établissent une correspondance satisfaisant à la condition AII seront appelés *univoques*.

Il est évident qu'on obtiendra tous les systèmes de coordonnées univoques en appliquant à l'un d'eux une transformation (1) telle qu'à tout système de valeurs réelles et *déterminées* de x, y, z corresponde, d'une manière univoque, un système de valeurs réelles et *déterminées* de x', y', z', et il est du reste entendu que nous ne comprenons pas le symbole $\pm\infty$ parmi les nombres déterminés.

Nous appellerons également univoques de telles transformations.

Enfin nous dirons que deux systèmes de coordonnées susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre par une transformation univoque appartiennent au même *type*. C'est notamment ce qui a lieu pour tous les systèmes univoques.

On pressent l'importance des conséquences d'une hypothèse affirmant que tel système de coordonnées est univoque.

Si l'on admet par exemple (axiome d'Archimède) que, sur une droite, les distances euclidiennes x de tous les points à un point fixe constituent un système de coordonnées univoques, il ne pourra plus en être de même du système auquel donneront lieu les distances non euclidiennes X définies par la formule

$$X = 2c \log \frac{2c + x}{2c - x}.$$

Car toute valeur de x extérieure à l'intervalle de $-2c$ à $+2c$ donnera lieu à une valeur imaginaire de X, les limites entre les valeurs réelles et les valeurs imaginaires de X étant $+\infty$ et $-\infty$.

Infini géométrique. — Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ jouissent, dans l'Analyse algébrique, de propriétés telles qu'il peut être avantageux, dans certains cas et en vue de la généralité de certaines propositions, de traiter le symbole $\pm\infty$ comme s'il représentait *une valeur* de la série des nombres, de telle sorte que celle-ci se fermerait alors sur elle-même.

Mais il ne s'agit là évidemment que d'une convention commode et, en énonçant l'axiome A II, nous n'avons pas entendu comprendre $\pm\infty$ parmi les nombres *déterminés*.

Il doit donc être entendu, d'après cet axiome, que, dans un système de coordonnées univoques, aucun point ne doit avoir pour coordonnées $\pm\infty$, et que, réciproquement, à tout système de valeurs *déterminées* (*alias* finies) doit correspondre un point *déterminé*.

De même nous entendons qu'une transformation ponctuelle univoque fait, ainsi que son inverse, correspondre à tout système de valeurs déterminées un autre système de valeurs également déterminées.

Il résulte de là que la propriété, pour une courbe, d'avoir des branches infinies, peut être définie analytiquement dans tout système de coordonnées univoques et par suite,

étant indépendante du système de coordonnées (pourvu qu'il soit univoque), elle doit ressortir à l'*Analysis situs*, où l'idée de l'infini géométrique possède ainsi droit de cité, ce qui se trouve d'ailleurs en concordance avec l'intuition suivant laquelle l'idée de l'infini géométrique nous apparaît d'un ordre plus général, par exemple, que l'idée consistant dans la particularisation de certaines lignes, telles que les lignes droites.

Cette propriété d'avoir des branches infinies ne se conçoit d'ailleurs que pour une courbe dont les points sont déterminés au moyen d'une loi constructive ou analytique et ne s'ap-s'applique pas à l'idée sensorielle d'une courbe ou, comme l'on dit, à un ensemble *actuel* de points.

Les surfaces à nappes infinies donnent lieu à des observations analogues à celles que nous venons de présenter.

Asymptotisme. — Il nous reste, pour satisfaire à notre programme, à introduire analytiquement la notion d'*asymptotisme*, que l'intuition classe parmi les idées ressortissant à l'*Analysis situs*.

Considérons une branche infinie de courbe, telle que, lorsque le point x, y, z qui la décrit s'éloigne indéfiniment, les rapports $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ tendent vers des limites déterminées.

Considérons une autre branche de courbe ayant les mêmes propriétés et donnant lieu aux mêmes valeurs pour les limites des rapports $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$ des coordonnées :

$$\lim. \frac{y}{x} = \lim \frac{y'}{x'}, \qquad \lim \frac{z}{x} = \lim \frac{z'}{x'}.$$

Nous dirons, dans ces conditions, que les deux branches infinies sont *asymptotiques*.

Mais cette propriété ne peut avoir une portée que si elle est indépendante, dans une certaine mesure, du choix du système de coordonnées, c'est-à-dire, suivant une remarque déjà faite, si elle est invariante par rapport à certaines transformations ponctuelles.

La propriété envisagée est évidemment invariante par rap-

port aux transformations linéaires ; mais cette particularité la classerait dans une zone frontière intermédiaire, comme nous le verrons, entre la Géométrie projective et la Géométrie métrique. Ce degré d'invariance ne nous suffit pas.

Soit

$$u = f_1(x,y,z), \quad v = f_2(x,y,z), \quad w = f_3(x,y,z)$$

les équations représentant une transformation ponctuelle, et admettons que les rapports $\frac{v}{u}$ et $\frac{w}{u}$ aient pour limites, lorsque x, y, z augmentent indéfiniment dans les conditions définies plus haut, des fonctions de lim. $\frac{y}{x}$ et lim. $\frac{z}{x}$. C'est ce qui se produira lorsque u, v, w seront des fonctions rationnelles du même degré (positif) de x, y, z, ou même des fonctions se comportant à l'infini comme des fonctions rationnelles du même degré.

La propriété asymptotique se conservera évidemment dans la transformation ponctuelle envisagée, c'est-à-dire que si l'on a

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{y'}{x'}, \qquad \lim \frac{z}{x} = \lim \frac{z'}{x'},$$

l'on aura également

$$\lim \frac{v}{u} = \lim \frac{v'}{u'}, \qquad \lim \frac{w}{u} = \lim \frac{w'}{u'}.$$

Il résulte de là que la propriété asymptotique est invariante par rapport à des transformations beaucoup plus générales que les transformations linéaires.

L'asymptotisme doit donc ressortir à l'*Analysis situûs*, et c'est la conclusion que nous voulions tirer de ces considérations.

Observons en terminant que, quoique les axiomes qui régissent l'*Analysis situûs* expriment des propriétés de l'*espace*, on ne doit pas, pour cela, attribuer à celui-ci une existence propre : ses propriétés constituent simplement une manière d'exprimer des propriétés de certaines lignes et de certaines constructions, qui servent à établir les systèmes de coordonnées.

Résumé. — A l'*Analysis sitûs* ressortissent les propriétés relatives à un groupe de notions, qui se ramènent aux suivantes : point, continuité, ligne, surface, transformation ponctuelle, connexion.

III

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Axiomes projectifs. — On appelle *projectives* les transformations dans lesquelles toute ligne droite est transformée en une ligne droite.

Les propriétés projectives des figures sont, par définition, celles qui sont invariantes (conservées) dans toute transformation ponctuelle projective de l'espace.

L'ensemble de ces propriétés constitue la *Géométrie projective*.

Il est clair, d'après cela, que les propriétés projectives sont celles qui, en plus des notions constituant l'objet de l'*Analysis sitûs*, font intervenir la notion de ligne droite.

Quelle que soit l'origine de la notion de ligne droite, cette notion doit être considérée, en Géométrie projective, comme primordiale, c'est-à-dire qu'elle n'est pas susceptible d'une définition la ramenant à des éléments appartenant à ce domaine ; autrement dit, elle doit être considérée comme donnée, ou bien acquise par un *processus* étranger.

On pourrait, il est vrai, prendre pour notion primordiale celle de transformation ponctuelle projective, mais elle ne s'impose pas assez directement à notre conception sensorielle.

A défaut de définition, il est nécessaire d'énoncer les propriétés fondamentales de la ligne droite qui, jointes aux axiomes AI et AII, doivent servir d'axiomes à la Géométrie projective.

Les axiomes projectifs sont au nombre de trois, savoir :

P I. — *Les lignes droites forment une famille de lignes continues, telles qu'une d'entre elles est déterminée par la condition de passer par deux points donnés.*

P II. — *Lorsque deux droites sont concourantes, deux autres droites respectivement concourantes avec chacune d'elles*