Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION
Autor: Gomes Teixeira, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7559

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

1. Nous allons nous occuper dans cette Note de la question suivante :

Déterminer la fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$, de plus petit degré, qui prend, elle et ses dérivées, par rapport à x, les valeurs

$$\begin{array}{l} y_1 \,,\; y_1' \,,\; y_1'' \,,\; \ldots \,,\; y_1^{(\alpha-1)} \,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_i \,,\; y_i' \,,\; y_i'' \,,\; \ldots \,,\; y_i^{(\beta-1)} \,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_k \,,\; y_k' \,,\; y_k'' \,,\; \ldots \,,\; y_k^{(\lambda-1)} \,, \end{array}$$

quand on donne à x, les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Nous avons étudié déjà ce problème dans un article publié en 1885 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3me série, t. IV); mais nous allons le résoudre ici par une analyse plus simple, au moyen d'une représentation des fonctions entières et homogènes de $\sin x$ et $\cos x$, qui donne immédiatement sa solution.

Je partirai, pour cela, de la fraction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\frac{f(\sin x\,,\cos x)}{\sin^{\alpha}(x-x_1)\ldots\sin^{\beta}(x-x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x-x_k)}\,,$$

où $f(\sin x, \cos x)$ représente une fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du degré $\alpha+\ldots+\beta+\ldots+\lambda-1$, et, en posant

$$f(\sin x\,,\cos x) = \cos^m x\,\mathrm{F}(\operatorname{tang} x)\,,$$
$$m = \alpha+\ldots+\beta+\ldots+\lambda-1\,,$$

je l'écrirai de la manière suivante :

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{\omega \cos x (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda}}$$

où

$$\omega = \cos^{\alpha} x_1 \ldots \cos^{\beta} x_i \ldots \cos^{\lambda} x_k \ .$$

Ensuite je considère la fonction rationnelle de $\operatorname{tang} x$

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} \ ,$$

où

$$F_1(\operatorname{tang} x) = (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda} \ ,$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)}}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{M_2^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \ldots + \frac{M_{\beta}^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta}} \right] ;$$

où $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots, M_{\beta}^{(i)}$ représentent des constantes qui coïncident avec les coefficients de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \ldots, h^0$ dans le développement de

$$\frac{h^{\beta} F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)} \ ;$$

et par conséquent

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)} \cos x_i \cos x}{\sin(x - x_i)} + \frac{M_2^{(i)} \cos^2 x_i \cos^2 x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{M_{\beta}^{(i)} \cos^{\beta} x_i \cos^{\beta} x}{\sin^{\beta}(x - x_i)} \right] .$$

Mais d'un autre côté, si l'on décompose en des fractions simples la fraction $\dfrac{1}{F_1(\operatorname{tang} x)}$ et si l'on représente par

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha; \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_\beta; \ldots$ les numérateurs de ces fractions, on trouve

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \frac{A_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1} + \frac{A_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^\alpha}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{B_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{B_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{P_1(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k} + \frac{P_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^\lambda},$$

et, par conséquent, en posant $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} x_i + h$,

$$\frac{h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta-1} F(\operatorname{tang} x_i) + h^\beta F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$

$$+ B_2 \left[h^{\beta-2} F(\operatorname{tang} x_i) + h^{\beta-1} F'(\operatorname{tang} x_i) + \frac{1}{2} h^\beta F''(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_\beta \left[F(\operatorname{tang} x_i) + h F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)!} F^{\beta-1}(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$

$$+ R h^\beta,$$

où $R h^\beta$ représente la partie du développement considéré qui provient des fractions

$$\frac{A_1 h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1}, \quad \frac{A_2 h^\beta F(\operatorname{tang} x + h)}{(\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1)^2}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$M_1^{(i)} = B_1 F(\operatorname{tang} x_i) + B_2 F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\operatorname{tang} x_i),$$

$$M_2^{(i)} = B_2 F(\operatorname{tang} x_i) + B_3 F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-2)!} F^{(\beta-2)}(\operatorname{tang} x_i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\beta^{(i)} = B_\beta F(\operatorname{tang} x_i),$$

où $F'(\text{tang}\,x_i)$, $F''(\text{tang}\,x_i)$, ... représentent les valeurs que les dérivées $F'(t)$, $F''(t)$, ... de $F(t)$ prennent, quand on y pose $t = \text{tang}\,x_i$.

De ces formules et de la suivante :

$$\frac{f(\sin x\,,\ \cos x)}{\sin^{\alpha}(x - x_1)\ldots\sin^{\beta}(x - x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x - x_k)} = \frac{F(\text{tang}\,x)}{\omega\cos x F_1(\text{tang}\,x)}\,,$$

il résulte la suivante :

$$\begin{aligned}
&f(\sin x\,,\ \cos x)\\
&= \frac{\varphi(x)}{\omega}\sum_{i=1}^{i=k}\left\{\left[\frac{B_1\cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_2\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^\beta x_i\cos^{\beta-1}x}{\sin^\beta(x - x_i)}\right]F(\text{tang}\,x_i)\right.\\
&+\left[\frac{B_2\cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_3\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^{\beta-1}x\cos^{\beta-2}x}{\sin^{\beta-1}(x - x_i)}\right]F'(\text{tang}\,x_i)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left.+\frac{1}{(\beta-1)!}\cdot\frac{B_\beta\cos x_i}{\sin(x - x_i)}\,F^{(\beta-1)}(\text{tang}\,x_i)\right\}\,,
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(x) = \sin^{\alpha}(x - x_1)\ldots\sin^{\beta}(x - x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x - x_k)\,,$$

qui est celle que nous proposions d'obtenir.

Au moyen de cette formule on peut résoudre immédiatement le problème antérieurement énoncé.

En effet, l'équation

$$f(\sin x\,,\ \cos x) = \cos^m x F(\text{tang}\,x)$$

et celles qui résultent de sa dérivation par rapport à x déterminent les quantités

$$F(\text{tang}\,x_i)\,,\ F'(\text{tang}\,x_i)\,,\ F''(\text{tang}\,x_i)\,,\ \ldots\,,$$

quand sont données les quantités

$$f(\sin x_i\,,\ \cos x_i),\ f'_x(\sin x_i\,,\ \cos x_i)\,,\ f''_{xx}(\sin x_i,\ \cos x_i)\,,\ \ldots\,.$$

2. — Voici encore un autre problème qu'on peut résoudre au moyen de la formule qu'on vient de trouver, en remarquant que l'expression qu'elle donne pour $f(\sin x, \cos x)$ peut être réduite premièrement à la forme

$$\begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & K_m \cos^m x + K_{m-2} \cos^{m-2} x + \dots \\ & + \sin x [L_{m-1} \cos^{m-1} x + L_{m-3} \cos^{m-3} x + \dots] \ , \end{aligned}$$

et qu'ensuite, au moyen des égalités connues

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \frac{1}{2}\binom{a}{\frac{1}{2}a}$$

si a est un entier pair, et

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \binom{a}{\frac{1}{2}(a-1)} \cos x,$$

si a est un entier impair, elle peut être réduite à la forme suivante :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_1 \cos x \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_1 \sin x \ , \end{aligned} \right.$$

quand m est *impair*, et à la suivante :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_0 \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_2 \sin 2x \ , \end{aligned} \right.$$

quand m est pair.

On peut donc résoudre, au moyen de la formule (1), le problème qui a pour but de chercher les coefficients qui entrent dans une des expressions (2) ou (3), quand sont données les valeurs qu'elle et ses dérivées prennent aux points $x_1, x_2, \dots, x_k$, en déterminant premièrement, au moyen de ces valeurs et de la formule (1), la fonction $f(\sin x, \cos x)$, et en la réduisant ensuite à une des formes (2) ou (3).

F. Gomes Teixeira (Porto).