Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

mathematische Statistik, II. Teil, 3. — K. Carda : Lineare kontinuierliche Gruppen, 2. — J. Plemelj : Theorie der hypergeometr. Diff.-Gl., 2. — J. Grünwald : Liniengeometrie (Forts.), 2. — Edm. Weiss : Praktische Astronomie, 4. — J. von Hepperger : Astrophysik, 3 ; Bahnbestimmung von Doppelsternen, 2. — Robert Schram : Interpolationsrechnung und mechanische Quadratur, 2. — Norb. Herz : Anwendung der elliptischen Funktionen in der Astronomie, 2 ; Kartennetze, 2. — Adalbert Prey : Die Schweremessungen, 2.

Pendant le semestre d'hiver 1904-1905, l'Université de Vienne a compté 8233 étudiants, dont 1950 auditeurs.

BIBLIOGRAPHIE

Alf. Capelli. — **Elementi di Aritmetica Ragionata e di Algebra** ad uso del l'istruzione secondaria. Libro III. I numeri negativi. — 1 vol. 112 p. ; prix : L. 1,80 ; Pellerano, Naples, 1904.

Ce fascicule, qui fait suite aux Livres I et II consacrés aux nombres naturels, a pour objet les nombres négatifs. L'auteur y examine la théorie des opérations fondamentales présentée dans toute sa rigueur scientifique. Il s'efforce à faire ressortir l'importance des nombres négatifs dans la résolution de problèmes simples de l'analyse indéterminée et pour le principe de l'identité entre polynomes établis à l'aide de la règle de Ruffini. On y trouve également les premiers principes de la théorie des congruences à titre d'introduction à la théorie des nombres.

La notion de nombre négatif est rendue intuitive à l'aide d'une série d'interprétations empruntées à la Géométrie, la tenue de livres et l'Electrostatique.

A chaque paragraphe sont joints des « notes et exercices ».

Ernest Kaller (Vienne).

Claro-C. Dassen. — **Tratado elemental de Geometriá Euclideá.** Tome I, *Geometria plana.* — 1 vol. in-12°, XXXII + 319 pages, 240 figures. Coni Hermanos, Buenos-Ayres, 1904.

Les élèves des écoles secondaires de l'Argentine n'ont guère eu jusqu'à ce jour entre les mains que des manuels dont les auteurs se bornaient à suivre les vieilles méthodes, à peine d'accord avec la saine logique, et à serrer d'aussi près que possible les programmes officiels rédigés plus d'une fois par des personnes profanes en la matière. M. Claro-C. Dassen s'est proposé d'écrire pour eux un traité élémentaire plus en harmonie avec les idées modernes et les méthodes rigoureuses qui doivent régler l'enseignement de la géométrie. Il faut, ainsi que le disait M. Veronese au congrès de

Paris de 1900, que l'auteur d'un nouveau traité de géométrie élémentaire se propose pour objet de concilier les exigences de la science avec celles de l'enseignement et de l'intelligence moyenne de ses élèves — que les professeurs aient foi au progrès de la science et se gardent des préjugés.

Pour remplir ce but, l'auteur a commencé par écarter absolument toute préoccupation de programme; libre de ce côté, il a pu ordonner son livre suivant le plan qui lui paraissait le meilleur, et voici celui qu'il a adopté. Les travaux de Lobatschefsky, Bolyai et de leurs continuateurs ayant définitivement proclamé l'indépendance absolue du postulat euclidien à l'égard des autres postulats fondamentaux de la géométrie, M. Dassen le sépare nettement des autres et fait deux parts bien distinctes de son livre.

Dans la première partie, sous le titre de *Principes communs aux géométries non-euclidiennes,* il range toutes les propositions indépendantes du postulat des parallèles et constituant la géométrie générale; cette première partie (pages 1-130) contient trois chapitres :

I. L'espace et les êtres géométriques, définitions, postulats de l'espace, de la droite et du plan. — Les angles et la circonférence;

II. Mesure des longueurs et des angles;

III. Les triangles et leurs applications les plus immédiates; circonférences, arcs et cordes.

La seconde partie de l'ouvrage, la plus étendue, et divisée en deux livres, contient l'exposé des principes spéciaux à la géométrie euclidienne. M. Dassen prend pour point de départ de sa théorie des parallèles un postulat qui n'est ni celui d'Euclide, ni celui que nous avons l'habitude de lui substituer. Préoccupé particulièrement de n'utiliser que les axiomes appelés *pratiques*, c'est-à-dire nécessaires pour les applications de la géométrie, et, en partant de la base de notre espace actuel, d'énoncer seulement les propriétés fondamentales que l'expérience, aidée de l'intuition et del'imagination, nous autorise à établir, il ne veut, pour un traité élémentaire destiné à des élèves qui étudient la géométrie pour la première fois et que leurs études doivent conduire rapidement aux applications, employer que des postulats en relation avec des figures pouvant s'observer. Dans un champ d'observation quelconque, l'expérience montre que *deux droites qui se rapprochent d'un côté s'écartent de l'autre*[1]. Donc deux droites coplanaires perpendiculaires à une troisième sont équidistantes, et par un point situé hors d'une droite on peut tracer une et une seule droite qui en soit équidistante. Enfin il y a identité entre les parallèles et les équidistantes.

La marche est plus longue que dans les ouvrages classiques usités en France, mais la méthode de M. Dassen a peut-être l'avantage de se présenter plus nettement devant les jeunes élèves et de mieux parler à leur imagination. Peu importe la route suivie, pourvu qu'elle soit large et nette, et conduise au but sans détour. La suite du chapitre I et le chapitre II contiennent les applications immédiates des parallèles et les parallélogrammes, et le chapitre III donne la mesure des angles inscrits à la circonférence avec ce qui s'y rapporte; ici l'auteur place le théorème sur l'existence des polygones réguliers inscrits et circonscrits, il nous semble que cette proposition pourrait être mise sans inconvénient dans la première partie du livre, car elle dépend de la géométrie générale.

---

[1] Voir du même auteur, dans le n° de janvier 1904 (pages 47-57) l'article qui a pour titre : *Théorie des parallèles basée sur un postulat plus évident que ceux employés ordinairement* (Voir aussi le présent numéro, p. 235 à 238, *Réd).*

Les trois chapitres suivants contiennent respectivement la théorie de la proportionnalité et des figures semblables, les relations métriques et la mesure des aires. Pour le rectangle, l'auteur se borne avec raison au cas où la hauteur et la base ayant une partie commune, la figure est décomposable en carrés.

Chaque partie du livre de M. Dassen est suivie d'un résumé renfermant l'énoncé des principales propositions et d'un choix d'exercices. Les élèves doivent apprendre le résumé par cœur; cette concession aux vieilles méthodes d'enseignement n'est peut-être pas une chose mauvaise en soi, mais nous croyons qu'il vaudrait mieux que le professeur donnât comme tâche à ses élèves de faire ce résumé eux-mêmes.

Le tome II, *Geometria del Espacio* est actuellement sous presse.

P. Barbarin (Bordeaux).

F. Dumont. — **Introduction à la Géométrie du 3me ordre.** — 1 vol. de IX, 308 p., Depallier & Cie, Annecy. 1904.

Au cours du 19me siècle la Géométrie du 3me ordre a reçu d'importants développements qui, pour la plupart, ont leurs points de départ dans les travaux fondamentaux des mathématiciens anglais Cayley, Salmon et Sylvester et du géomètre suisse Steiner. Toutefois ce ne sont encore que des études partielles ayant en vue soit les propriétés analytiques, soit les propriétés projectives et il serait à souhaiter qu'un jeune géomètre, dominant à la fois les théories analytiques et synthétiques, entreprît une étude d'ensemble sur les courbes et les surfaces du 3me ordre. Dans l'état actuel de la Science un pareil traité ne saurait tarder.

Quoi qu'il en soit le présent ouvrage, modestement intitulé *Introduction à la Géométrie du* 3me *ordre*, apporte une importante contribution à un exposé systématique de cette branche ; il fournit en même temps une utile préparation à l'étude des travaux récents sur les courbes et les surfaces algébriques.

M. Dumont a réuni dans ce volume les éléments essentiels de la Géométrie du 3me ordre en tenant compte des divers points de vue auxquels se sont placés les auteurs. Il examine d'abord la Géométrie sur une droite, puis il présente les propriétés générales des cubiques planes en étudiant successivement les divers modes de génération, les pôles et polaires, la classification des cubiques planes, les systèmes de cubiques et leurs transformations.

La partie principale de l'ouvrage est la théorie des surfaces du 3me ordre. L'auteur la fait précéder d'une étude des cubiques gauches, puis il passe en revue les principaux modes de génération de la surface générale du 3me ordre. Viennent ensuite les singularités de ces surfaces, les pôles et polaires, la classification et les transformations des surfaces cubiques, les représentations d'une surface cubique sur un plan, etc.

Toutes ces questions, d'une grande diversité par leur objet, sont présentées avec beaucoup de clarté. L'auteur a eu soin de les accompagner d'un intéressant choix d'exercices à résoudre.

J.-S. Mackay. — **Plane Geometry, practical and theorical.** Books I, II, III 1 vol. in-16o; London and Edinburgh, W. & R. Chambers limited, 1904.

Dès que les fondements de la Géométrie sont devenus le sujet d'utiles discussions, les traités élémentaires à l'usage de l'enseignement ont béné-

ficié d'heureuses innovations. En Italie particulièrement le réveil s'est accentué plus que dans les autres pays et surtout après les puissantes recherches d'un savant professeur de l'Université de Padoue, M. le sénateur Veronese. Après la publication de ses « *Fondamenti della Geometria* », en 1891, il a paru un grand nombre de traités, qui presque tous ont adopté les mêmes idées fondamentales, bien que quelques-uns aient oublié de rappeler l'auteur principal. Toutefois plusieurs de ces traités n'ont pas su maintenir l'unité scientifique et didactique qui doit caractériser l'exposé d'une discipline élémentaire. Dans les autres nations aussi et particulièrement en France et en Angleterre, où quelques-uns de nos livres[1] ont su s'ouvrir une voie glorieuse, des savants géomètres ont consacré[2] leur activité à réformer l'enseignement des éléments de géométrie. Parmi ceux-ci se trouve précisément M. Mackay, le savant professeur de l'Université d'Edimbourg, dont nous avons admiré des recherches historiques sur plusieurs théorèmes et théories géométriques. Il nous présente un traité qui est inspiré des idées modernes sur la réforme euclidienne. Ce domaine donne encore lieu à bien des discussions scientifiques et didactiques, aussi M. le professeur Mackay voudra-t-il bien me permettre quelques observations sur son livre, le meilleur certainement parmi tous les traités anglais élémentaires que j'ai pu lire pendant ces dernières années. Je prendrai, non comme terme de comparaison, mais comme base de mes observations, les idées fondamentales de M. le professeur Veronese qui, selon moi, représentent ce qu'il y a aujourd'hui de mieux sur ce sujet en Italie comme dans les autres pays.

Je dois avant tout noter que si dans sa première partie ce livre nous présente des défauts, ils sont spécialement dus aux programmes officiels, auxquels l'auteur a dû se conformer.

Le traité de M. Mackay se subdivise en trois livres qui embrassent les quatre premiers livres classiques des Eléments d'Euclide ; mais ils sont précédés d'une introduction destinée à familiariser les élèves avec les termes géométriques, l'usage des instruments et les propriétés les plus intuitives de certaines figures, tout suivi de l'exposition de nombreux *expériments* (l'auteur déclare les nommer expériments et non exercices car la Géométrie n'est pas une science expérimenfale). Or, le système de tirer de l'expérience le motif à notions élémentaires, claires et précises, est certainement plus raisonnable que celui de donner des définitions aprioristiques et formelles qui très souvent ou sont démenties dans la suite du livre, ou doivent être modifiées et corrigées. Il ne sera jamais répété suffisamment, observe M. Veronese dans ses *Elementi della Geometria,* que la Géométrie élémentaire a son fondement naturel dans l'observation des faits extérieurs, c'est-à-dire dans l'intuition ; elle ne doit donc jamais se montrer aux élèves comme un système de symboles auxquels on assigne arbitrairement des propriétés déterminées, comme encore aujourd'hui on le rencontre dans certains travaux sur les principes de la Géométrie, sans s'inquiéter si elles correspondent ou non à l'observation. Mais avec tout cela il ne me semble pas recommandable de passer de la connaissance d'un instrument à une notion des plus importantes et controversées en disant (page 6) que « si la circonférence d'un cercle était divisée en 360 parties égales, chaque partie se nommerait degré : si les deux

[1] Voyez, par exemple, la traduction française des *Eléments de Géométrie* de A. Faifofer (Paris, A. Rogier).

[2] Je veux mentionner particulièrement les savantes recherches de M. le Professeur J.-M. Hill.

extrémités de ce petit arc étaient jointes au centre, on formerait ici un angle nommé angle d'un degré ». De cette manière déjà avant la notion claire d'angle, le jeune enfant devrait avoir celle d'angle au centre et de sa mesure.

Les « expériments » qui suivent ces notions devraient plutôt s'intituler « Eléments de dessin géométrique », car ils mènent à la construction des arcs, aux sommes et différences d'angles, à la pratique du rapporteur dans la construction de la perpendiculaire à une droite, à la construction de *figures* à quatre côtés qui forment des angles droits, à la construction de triangles et ses axes de symétrie, de polygones étoilés, etc. Toutefois, il serait bon de définir la somme ou différence de deux segments et le produit d'un segment par un nombre entier : l'élève aurait ainsi une juste notion de ce que sont ces opérations étendues à la Géométrie.

Et nous voilà (page 19) au *Livre I (angles, triangles, parallèles, parallélogrammes),* et aux définitions du point, de la ligne, de la surface, du corps : « un point à position mais non grandeur ». Pour des jeunes enfants dont l'intelligence commence à peine à se développer, une affirmation aussi laconique, et avant même qu'ils aient l'idée de ce que peut être une grandeur, n'est guère évidente. De même il ne me semble pas propre que de définir la ligne (page 19) comme celle qui « a position et a longueur », ajoutant après « qu'on dit de la ligne qu'elle possède *une dimension,* c'est-à-dire, longueur ». Quel besoin y a-t-il de faire intervenir l'idée de *dimension,* bien autrement que simple et dont on n'a pas besoin pour traiter des points, des droites, des cercles, etc.? Même remarque pour les définitions qui suivent et particulièrement pour celle du *solide* « portion de l'espace limitée par une ou plusieurs surfaces ». Nous savons que si l'on transporte idéalement un solide géométrique dans un autre lieu, il y a encore de l'espace où le corps se trouvait auparavant : les conclusions que l'on pourrait tirer de cette définition sont donc bien claires. — La définition d'angle qui vient compléter celle donnée dans l'introduction me semble incomplète : « si deux droites sont menées d'un même point, on dit qu'elles renferment un angle ». L'élève ne remarquera-t-il pas que deux régions du plan déterminées par les deux droites correspondent à la définition d'angle ? Pour les parallèles l'auteur adopte la définition euclidienne « si étant dans le même plan et prolongées elles indéfiniment ne se rencontrent pas ». Cette définition, quoique encore bien répandue, n'est plus acceptable, car nous ne pouvons imaginer les droites prolongées que d'une quantité finie, tandis que les droites géométriques sont infinies ; en outre, les propriétés géométriques qui nous permettent de *vérifier* le parallélisme, se rapportent à la portion du plan qui nous est accessible. J'ai la conviction que, d'après les travaux modernes sur les fondements de la Géométrie, il est plus rationnel, scientifiquement et didactiquement, d'adopter la définition, indépendante de la notion de plan, proposée par le savant professeur Veronese qui est plus conforme aux exigences géométriques de nos jours : après la définition des figures opposées par rapport à un point et celle de transversale de deux droites, il dit que « deux droites sont parallèles si l'une d'elles contient deux points opposés à deux points de l'autre par rapport au milieu d'une transversale commune ». Cette définition, qui contient aussi la construction de la parallèle à une droite donnée, modifie le postulat euclidien en disant que « si deux droites sont parallèles, elles sont des figures opposées l'une à l'autre par rapport au milieu de chacun de ses segments transversaux ». Ce postulat est par lui-

même objectif, pouvant être vérifié, dans les limites de notre expérience, avec la plus grande approximation. — Les propriétés des parallèles et les démonstrations se trouvent aux pages 94 et suivantes, tandis qu'en adoptant la définition ci-dessus, ces propriétés pourraient s'énoncer dès le début, avant même de la définition du plan et de l'angle.

A la page 47 est la définition de *figures congruentes* (qui sont égales sous tous les aspects) et l'auteur dit que la méthode qui sert pour montrer la congruence des figures s'appelle méthode de superposition. A propos de cette définition de la congruence, j'estime, avec M. Veronese, qu'une telle méthode conduit à autant de définitions d'égalité qu'il y a de catégories de figures dans la Géométrie élémentaire, car l'idée d'égalité en Géométrie est une conséquence directe de la logique plus simple : « il faut donc, observe le savant professeur de l'Université de Padoue, donner tout de suite la définition qui correspond à la notion commune d'égalité et de laquelle se déduisent la correspondance univoque et l'égalité des segments correspondants : conceptions simples et intuitives qui restent fondamentales dans la Géométrie et qui, étant utilisées dans tous les cas d'égalité des figures, servent aussi d'analogie pour la définition de similitude ». Et de ces analogies, comme des différences entre les objets géométriques, ressort l'incontestable supériorité de cette méthode sur toutes les autres[1].

Ceux qui se conforment encore aux méthodes anciennes, ceux qui recourent encore au postulat du mouvement sans déformation pour définir et démontrer l'égalité des figures, et dans cette large catégorie est aussi M. Mackay, ne réussiront jamais à prouver qu'ils obtiennent par ce moyen la rigueur scientifique que l'on doit trouver même dans un manuel élémentaire.

Cette observation s'applique aussi à la définition (page 47) des figures équivalentes comme « celles qui ont aires égales ». Et qu'est-ce que c'est l'aire d'une figure si la notion d'aire n'a pas encore été donnée? En effet, cette notion est le fondement du deuxième livre, encore un peu loin. Les difficultés que présente la démonstration des constructions à la page 61 (problèmes 15, etc.) disparaissent si l'on admet la définition « sont équivalentes les figures qui sont formées ou peuvent se décomposer dans le même nombre de parties respectivement égales. »

Le Livre II, consacré à la *mesure des figures planes*, est très bien fait. Comme on devait s'y attendre, par suite de la définition d'équivalence adoptée par l'auteur, on trouve démontrés ici les principaux théorèmes sur les figures équivalentes. Le théorème de Pythagore est exposé non seulement avec la démonstration ordinaire, mais aussi à l'aide de celles de Schooten (*Exercitationes mathematicæ*, 1657, p. 111) et de Perigal. De tous ces théorèmes l'auteur donne les applications algébriques. Une large collection d'applications et de problèmes accompagne chaque théorème.

Vient ensuite le Livre III, intitulé *le cercle*. Les propositions ordinaires sur les rayons, cordes, angles au centre et angles inscrits, etc., sont démontrées avec beaucoup de clarté et de soin. Les propriétés de l'axe radical de deux cercles ou de trois cercles considérés deux à deux, comme les problèmes qui s'y rapportent, méritent des éloges particuliers. Il en est de même de la construction des tangentes et des questions relatives aux triangles ins-

[1] VERONESE, *Fondamenti della Geometria* (traduction allemande de M. A. Schepp, Teubner, 1894). — Voir la Préface.

crits ou circonscrits à une circonférence. On trouve aussi en deux pages un bref exposé de la Géométrographie, sujet sur lequel l'auteur avait déjà écrit une note très intéressante avec des modifications aux notations de M. Lemoine.

En conclusion donc on peut dire que dans son ensemble ce livre forme un bon traité. Parmi les défauts que j'ai voulu poser en évidence, les uns sont dus aux méthodes anciennes auxquelles un grand nombre d'auteurs n'ont pas encore voulu renoncer; les autres sont la conséquence des programmes officiels dont l'auteur a nécessairement dû tenir compte. L'ouvrage de M. Mackay n'en constitue pas moins un progrès sur les Eléments euclidiens en usage chez les Anglais.

Prof. C. Alasia (Tempio, Sard.).

W. Pflieger. — **Elementare Planimetrie**. — Collection Schubert, 1 vol., 430 p., prix: Mk. 4.80. G. J. Göschen, Leipzig.

Ce traité de Géométrie plane contraste avec la plupart des manuels en usage dans les pays de langue française. L'auteur a abandonné la tradition de l'enseignement de la Géométrie d'après les Eléments d'Euclide. Il s'est proposé, d'une part, de grouper autant que possible dans un même chapitre les propositions se rapportant au même sujet; d'autre part et surtout d'exposer la Géométrie suivant un ordre plus naturel; il veut introduire les notions géométriques comme elles se présentent à notre esprit au cours de son développement.

Ainsi les notions de circonférence, arc, corde, secteur sont introduites dès le début de l'ouvrage. L'avantage de cet arrangement est de permettre dès les premières leçons des applications graphiques. La notion de la bande (*Streife*) joue un grand rôle dans la première moitié du volume. C'est une faute, dit l'auteur dans la préface, de ne pas apprendre à l'enfant qui chaque jour voit dans ses cahiers des bandes et des séries de bandes, quelles sont les propriétés de ces figures et le parti qu'il en peut tirer.

Une autre préoccupation de l'auteur a été de choisir les démonstrations les plus propres à faire ressortir la signification et la valeur des théorèmes. Souvent les démonstrations à l'aide d'égalités de triangles sont artificielles; et comme du reste, l'auteur n'introduit les triangles que fort tard, ses démonstrations diffèrent beaucoup des démonstrations classiques: la symétrie des figures y joue un rôle capital.

Les axiomes nécessaires ont été bien mis en relief. Nous devons signaler surtout le soin apporté à l'introduction et à la jusification du calcul des grandeurs géométriques. Les lois de ce calcul sont explicitement énoncées et leur identité avec les lois du calcul algébrique est bien mise en évidence.

Chaque paragraphe est accompagné de nombreux exercices très judicieusement choisis.

Voici une brève analyse des premiers chapitres.

Le premier traite des éléments des figures, corps, surfaces, lignes, points. La longueur (*Strecke*) fait l'objet du second chapitre. Les lois de l'addition et de la soustraction des longueurs sont explicitement indiquées et l'auteur introduit comme axiomes la loi de l'addition (interversion des termes) et l'existence de la différence de deux longueurs. De la notion de longueur est déduite celle de la face plane.

Dans le chapitre suivant, le prolongement d'une longueur, d'une face plane,

d'un corps, conduit aux notions de ligne droite, de plan et d'espace (éléments infinis).

Le chapitre IV introduit les notions d'égalité et d'équivalence des figures finies, puis des figures infinies. Il est montré à ce propos comment certaines propositions vraies pour des éléments finis quelconques cessent de l'être lorsque ces éléments sont prolongés indéfiniment.

Le cercle et l'angle, tel est le titre du chapitre V. La définition et les propriétés élémentaires du cercle sont suivies des théorèmes sur les secteurs, les arcs et les cordes correspondants. L'angle est défini comme limite d'un secteur dont le rayon devient infini. L'auteur se fait alors scrupule d'étendre sans autre aux angles les théorèmes démontrés pour les secteurs. Il *postule* que les théorèmes valables pour des secteurs de rayon fini quelconque le sont encore lorsque le rayon devient infini, lorsque le secteur devient un angle.

Nous laissons l'analyse détaillée de l'ouvrage et signalons seulement quelques points caractéristiques.

Dans la théorie des parallèles, l'auteur est tout naturellemnnt conduit à prendre pour axiome[1] une proposition qui renferme l'axiome classique et revient à peu près à dire que deux angles correspondants formés par deux parallèles et une transversale sont toujours égaux.

Le parallélogramme est étudié comme partie commune à deux bandes; cette étude est suivie de celle du trapèze.

C'est seulement au commencement du second tiers du volume, après l'étude des propriétés des tangentes à une et deux circonférences et des angles inscrits. que l'auteur place la théorie du triangle. Il peut alors grouper dans un même chapitre tout ce qui a trait à cette figure et développer les propositions les plus essentielles de la géométrie du triangle.

Très remarquables quant à l'exposition nette et précise, sont les chapitres XII et XIV se rapportant l'un à la comparaison et au calcul des surfaces, l'autre à la mesure des grandeurs géométriques et aux lignes proportionnelles.

La dernière partie renferme l'étude des points et rayons harmoniques, des pôles et polaires, de l'inversion et des faisceaux de cercles. Les définitions des points et rayons harmoniques sont choisies de manière à mettre en relief le principe de dualité et à éviter les fonctions goniométriques.

Cet ouvrage rendra de grands services à ceux qui sont chargés de l'enseignement de la géométrie élémentaire; ils pourront y trouver un précieux choix d'exercices bien gradués et d'utiles indications pour leur enseignement.

C. Jaccottet (Lausanne).

Colonel J. Sornein. — **Essai sur l'origine et les fondements de la Géométrie.** 1 vol. in 8° de 360 pages. Le Manut. Cherbourg, 1904.

La solution de la question des Fondements de la Géométrie admet un premier stade, qui peut être défini par la proposition suivante :

En prenant pour base l'idée de figure (comportant notamment les notions

[1] « Bei der Vergleichung der Winkel sind Streifen und Streifenhälften nicht zu berücksichtigen. » Dans la comparaison des angles, on ne tiendra pas compte des bandes et des demi-bandes.

de point, ligne, surface et continuité), déduire d'un certain nombre de propositions non démontrées ou « axiomes » les théorèmes principaux de la Géométrie vulgaire ou métrique.

Tel est l'objet essentiel de l'ouvrage de M. le colonel Sornein.

Conformément aux errements suivis jusqu'à présent dans les ouvrages où la question est traitée sans emploi de l'Analyse mathématique, celui-ci ne comprend pas le « déplacement sans déformation » (Bewegung) parmi les concepts fondamentaux et par suite n'en fait pas l'objet d'axiomes. Mais il diffère de ces ouvrages par l'emploi d'un nombre très restreint de concepts fondamentaux et d'axiomes — trop restreint, pensons-nous ; car nous n'oserions pas affirmer que le système de fondements exposé au titre I constitue une base suffisante pour établir rationnellement une *métrique*, et il ne serait peut-être pas difficile, en examinant attentivement les démonstrations des premiers théorèmes, de découvrir les propriétés qui y sont employées sans avoir été explicitement énoncées : ces propriétés ne sont autres d'ailleurs que celles qui sont exprimées par les axiomes adoptés dans les travaux récents, par exemple dans le Mémoire maintes fois couronné de M. Hilbert.

Au surplus l'intérêt principal de l'ouvrage réside, à notre avis, dans les parties consacrées à la démonstration des principaux théorèmes de la Géométrie suivant un ordre très judicieux.

Une fois acquises les notions de distance, de congruence et de droite, la sphère est définie comme lieu des points équidistants d'un point déterminé, puis est introduite la circonférence comme intersection de deux sphères. On démontre alors les principales propriétés ressortissant à la Géométrie sphérique, qui se trouve ainsi établie indépendamment de la notion de plan, ce qui est conforme à la nature des choses.

Alors seulement est défini le plan comme lieu des points équidistants d'un point déterminé, et l'on *démontre* qu'une droite qui a deux de ses points dans un plan y est située toute entière.

On démontre également les propriétés fondamentales du plan au point de vue métrique, telles que sa faculté de se recouvrir par rotation autour d'une de ses normales et par retournement autour d'une de ses droites ; puis sont démontrés les cas d'égalité des triangles à l'exception du troisième, qui constitue la définition même de l'égalité, ainsi qu'il convient puisque la notion de distance a été prise pour base de la Métrique. On aborde enfin la théorie des parallèles ; mais ici nous déclarons ne pouvoir suivre l'auteur dans ses considérations un peu déconcertantes sur les segments infinis.

Signalons, en terminant, quelques réflexions particulièrement heureuses sur l'origine de la Géométrie, qui se trouvent dans l'avant-propos.

G. Combebiac (Limoges).

A. Tresse et Thybaut. — **Cours de géométrie analytique** à l'usage des candidats à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, aux Ecoles des Mines, à l'Ecole des Ponts et Chaussées et des élèves de première année de mathématiques spéciales. — 1 vol. gr. in-8°, 549 p. ; prix : fr. 12.— ; Librairie Armand Colin, Paris, 1904.

Les lecteurs de *L'Ens. math.* ont eu sous les yeux les renseignements généraux sur l'esprit dans lequel ont été faites les modifications au programme de l'Ecole centrale de Paris (v. 5me année, p. 57 et suiv., 1903). Ils savent que « les modifications apportées au programme ont été faites dans le but de le *simplifier*, de le *préciser* et de le *développer* dans le sens dans lequel les

élèves eux-mêmes sont appelés à se diriger après leur entrée à l'Ecole ». Pour ce qui concerne particulièrement la Géométrie analytique le programme a été considérablement réduit, pour le ramener aux notions essentielles indispensables aux ingénieurs.

C'est en s'inspirant de ces idées que MM. Tresse et Thybaut ont rédigé ce Cours de Géométrie analytique. Nous nous empressons de dire qu'ils ont pleinement atteint leur but ; leur traité sera examiné avec intérêt par tous ceux qui enseignent la Géométrie analytique.

Voici les grandes divisions de l'Ouvrage :

Géométrie plane. — I. Préliminaires. — II. Droite et circonférence. — III. Courbes planes. — IV. Les trois coniques. — V. Etude sommaire des courbes du second degré.

Géométrie dans l'espace. — VI. Droite, plan et sphère. — VII. Notions sur les courbes et les surfaces. — VIII. Les cinq quadriques. — IX. Etude sommaire des surfaces du second degré.

A signaler, entre autres, qu'en raison de l'importance des notions fondamentales sur les courbes planes, les auteurs ont étudié d'une manière très approfondie le problème de la construction d'une courbe et les divers modes de définition d'une courbe. H. F.

Ernest Wienecke (Berlin). — **Der geometrische Vorkursus** in schulgemässer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten. Zum Gebrauch an allen Lehranstalten bearbeitet. Mit 59 Fig. — 1 vol. cart. in-8, 97 p. ; prix : Mk. 2,20 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1904.

Les leçons destinées à fournir une introduction à l'enseignement de la Géométrie élémentaire ont une importance capitale et exigent beaucoup de soin de la part du maître. Et cet effort doit se porter non seulement sur la partie didactique, mais également, dans une certaine mesure, sur les considérations d'ordre philosophique. Ces conditions se trouvent précisément remplies dans ce petit ouvrage, d'une conception originale, et qui sera lu avec profit par tous ceux qui sont chargés de l'enseignement des premières notions de Géométrie.

Dans l'introduction il examine ce que doit être un pareil enseignement propédeutique. Il expose ensuite les notions fondamentales et la mesure des solides. Le tout est accompagné d'exemples, fort bien choisis, et destinés à rendre intuitives ces premières notions.

A côté de ces excellentes qualités, ce manuel présente pourtant de petits défauts : ainsi les figures des solides laissent beaucoup à désirer (v. p. ex. p. 5) ; la notion de *perpendiculaire* se trouve, identifiée une fois avec celle de *verticale* (p. 21), puis avec celle de *normale* (p. 40) ; pourquoi calculer un volume avec 7 décimales, alors que l'on prend $\pi = 3{,}14$? D'autre part une lecture attentive des épreuves aurait permis d'éviter les fautes d'impression et de calculs qui se sont glissées dans les problèmes, d'ailleurs fort bien choisis. Ernest Kaller (Vienne).