Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES
Autor: Nielsen, Niels
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8438

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. — Supposons n positif entier, puis posons

$$(1) \qquad \cos(n\varphi) = a_{n,0}(\cos\varphi)^n + a_{n,2}(\cos\varphi)^{n-2} + a_{n,4}(\cos\varphi)^{n-4} + \ldots$$

HEINE[1] a déterminé les coefficients $a_{n,2p}$ en applicant, pour

$$x = \cos\varphi \pm i\sin\varphi ,$$

la série de puissances ordinaire qui représente $\log(1+x)$. Les mêmes coefficients et les coefficients de quelques développements analogues sont déterminés par YVON DE VILLARCEAU[2] qui a appliqué les propriétés différentielles des fonctions trigonométriques et sa méthode a été modifiée par CATALAN[3].

En étudiant pour le moment les fonctions sphériques généralisées, j'ai trouvé une détermination tout à fait élémentaire de tous les coefficients susdits, et cela en m'appuyant seulement sur la formule binomiale à exposant positif entier et sur la série géométrique ordinaire.

A cet effet, nous avons à partir de l'identité

$$(2) \qquad \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} ;$$

posons d'abord

$$q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi) ,$$

puis

$$q = x(\cos\varphi - i\sin\varphi) ,$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. II, p. 187, 1870.
[2] *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469-1471, 1876.
[3] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 529-536, 1883.

nous aurons, en additionnant puis soustrayant les formules ainsi obtenues, ces deux autres

$$(3)\quad \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + \ldots + x^n\cos(n\varphi) + x^{n+1}\,Q$$

$$(4)\quad \frac{x\sin\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = \quad x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi + \ldots + x^n\sin(n\varphi) + x^{n+1}\,Q_1.$$

où Q et Q_1 désignent des quantités qui resteront finies pour $x = 0$.

Cela posé, mettons encore dans (2)

$$q = 2x\cos\varphi - x^2\,,$$

nous aurons de même

$$(5)\quad \frac{1}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + x(2\cos\varphi - x) + x^2(2\cos\varphi - x)^2 + \ldots + x^n(2\cos\varphi - x)^n + x^{n+1}\,Q_2\,,$$

où Q_2 est fini pour $x = 0$.

Ordonnons maintenant suivant les puissances positives entières de x les premiers termes du second membre de (5), nous aurons à chercher le coefficient de x^r obtenu du terme

$$x^{r-p}(2\cos\varphi - x)^{r-p}\,, \qquad 2p \leqq r\,,$$

pour lequel la formule binomiale donnera immédiatement cette expression :

$$(-1)^p\binom{r-p}{p}(2\cos\varphi)^{r-2p}\,,$$

de sorte que nous obtenons, en vertu de (5), une nouvelle identité de cette forme

$$(6)\quad \frac{1}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + A_1(\cos\varphi)\,x + A_2(\cos\varphi)\,x^2 + \ldots + A_n(\cos\varphi)\,x^n + x^{n+1}\,Q_3\,;$$

où Q_3 restera fini pour $x = 0$, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(7)\quad A_r(\cos\varphi) = (2\cos\varphi)^r - \binom{r-1}{1}(2\cos\varphi)^{r-2} + \binom{r-2}{2}(2\cos\varphi)^{r-4} - \ldots$$

Multiplions maintenant par $x \sin \varphi$ les deux membres de (6), il résulte, en vertu de (4), une identité de cette forme

$$(8) \qquad x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \ldots + x^n \sin (n\varphi) = x^2 A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi + x^3 A_2 \cos \varphi \sin \varphi + \ldots + x^n A_{n-1} (\cos \varphi) \sin \varphi + x^{n+1} Q_4 .$$

où Q_4 restera fini pour $x = 0$. Divisons ensuite par x^2 les deux membres de (8), puis mettons $x = 0$, il résultera

$$\sin 2\varphi = A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi .$$

d'où en divisant par x^3 l'identité nouvelle obtenue de (8) en supprimant le premier terme de ses deux membres, l'hypothèse $x = 0$ donnera de nouveau

$$\sin 3\varphi = A_2 (\cos \varphi) \sin \varphi .$$

et ainsi de suite. Nous aurons généralement

$$(9) \qquad \sin (n\varphi) = A_{n-1} (\cos \varphi) . \sin \varphi .$$

Cela posé, multiplions par $1 - x \cos \varphi$ les deux membres de (6), puis comparons avec (3) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en suivant le même procédé, l'autre formule générale analogue à (9) :

$$(10) \qquad \cos (n\varphi) = A_n (\cos \varphi) - A_{n-1} (\cos \varphi) . \cos \varphi .$$

Or, la formule (10) nous permet de déterminer les coefficients $a_{n,2s}$ figurant au second membre de (1) : nous aurons en effet, pour $r > 0$,

$$a_{n,2r} = (-1)^r \binom{n-r}{r} 2^{n-2r} - (-1)^r \binom{n-r-1}{r-1} . 2^{n-2r-1} ,$$

d'où, après une simple réduction

$$(11) \qquad a_{n,2r} = (-1)^r \frac{2n-r}{r} . \binom{n-r-1}{r-1} . 2^{n-2r-1} .$$

tandis que nous trouverons particulièrement, pour $r = 0$,

$$(11 \text{ bis}) \qquad a_{n,0} = 2^{n-1} .$$

Pour déduire d'autres formules fondamentales, mettons

dans (9) (10) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ, nous aurons pour n pair, en mettant $2n$ au lieu de n :

$$\sin(2n\varphi) = (-1)^n \left[A_{2n-1}(\sin\varphi) \,.\, \cos\varphi\right] . \tag{12}$$

$$\cos(2n\varphi) = (-1)^n \left[A_{2n}(\sin\varphi) - A_{2n-1}(\sin\varphi)\sin\varphi\right] , \tag{13}$$

et pour n impair, en mettant $2n+1$ au lieu de n :

$$\sin(2n+1)\varphi = (-1)^n \left[A_{2n+1}(\sin\varphi) - A_{2n}(\sin\varphi)\sin\varphi\right] \tag{12 bis}$$

$$\cos(2n+1)\varphi = (-1)^n \; A_{2n}(\sin\varphi)\cos\varphi \; . \tag{13 bis}$$

Cela posé, remarquons ensuite que le produit

$$P_n = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \;..\; \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

s'évanouira pour $x = \frac{p\pi}{n}$, où p désigne un nombre entier quelconque, puis appliquons l'identité

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{p\pi}{n} + x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{n} - x\right) ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin^2\frac{p\pi}{n} - \sin^2 x \; ,$$

il est évident que P_n est un polynome entier de $\sin x$, abstraction faite du facteur $\cos x$ dans le cas, où n est pair ; c'est-à-dire que P_n est une expression complètement de la même nature que le second membre de (12) et (12 bis) si nous y remplaçons φ par x ; de plus P_n s'évanouira pour les mêmes valeurs de $\sin x$ que $\sin(nx)$, d'où il résulte une identité de cette forme

$$\sin x = \alpha_n \,.\, \sin\frac{x}{n} \,.\, \sin\frac{x+\pi}{n} \,.\, \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \; , \tag{14}$$

où α_n désigne un facteur indépendant de x.

Pour déterminer maintenant la valeur de α_n divisons d'abord

par x les deux membres de (14), puis posons $x = 0$, nous aurons

$$(15) \qquad n = \alpha_n \,.\, \sin\frac{\pi}{n} \,.\, \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

tandis que l'hypothèse $x = \frac{\pi}{2}$ donnera de même

$$(16) \qquad 1 = \alpha_n \,.\, \sin\frac{\pi}{2n} \,.\, \sin\frac{3\pi}{2n} \,.\, \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \,.$$

d'où en multipliant (15) (16)

$$2n = 2\alpha_n^2 . \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \,,$$

ce qui donnera, en vertu de (15),

$$(17) \qquad \alpha_{2n} = 2\alpha_n^2 \,.$$

Cela posé, mettons dans (15),

$$\sin\frac{2p\pi}{n} = 2\cos\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{p\pi}{2n} = 2\sin\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{(n+p)\pi}{2n} \,,$$

nous aurons de même

$$n = \alpha_n \,.\, 2^{n-1} \,.\, \frac{2n}{\alpha_{2n}} \,,$$

ou bien,

$$\alpha_{2n} = 2^n . \alpha_n \,,$$

d'où, en vertu de (17),

$$\alpha_n = 2^{n-1} \,;$$

car la valeur $\alpha_n = 0$ est impossible ici ; nous avons ainsi démontré cette autre formule générale

$$(18) \qquad \sin x = 2^{n-1} \sin\frac{x}{n} \sin\frac{x+\pi}{n} \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \,,$$

tandis que les formules (15) (16) donnent ces résultats numériques

$$(19) \qquad \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$(19\text{ bis}) \qquad \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \,.$$

II. — Pour donner une application des dernières formules que nous venons de développer, cherchons le discriminant Δ_n de cette équation algébrique

$$(20) \qquad a_{n,0}x^n + a_{n,2}x^{n-2} + a_{n,4}x^{n-4} + \ldots = \omega ,$$

où ω est une quantité donnée, tandis que les coefficients $a_{n,2p}$ sont les mêmes qui figurent dans (1).

A cet effet, désignons par α un des angles qui satisfont à l'égalité

$$\cos\alpha = \omega ,$$

de sorte que α deviendra imaginaire, quand ω n'est pas égal à une quantité réelle, telle que $-1 \leqq \omega \leqq +1$; mais, en tous cas, toutes les racines de (20) deviendront

$$\cos\frac{\alpha}{n}, \cos\frac{\alpha+2\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{\alpha+(2n-2)\pi}{n} .$$

Cela posé, nous trouverons $\pm\sqrt{\Delta_n}$ égale au produit de tous les facteurs de la forme

$$(21) \quad \cos\frac{\alpha+2p\pi}{n} - \cos\frac{\alpha+2q\pi}{n} = 2\sin\frac{(q-p)\pi}{n} . \sin\frac{\alpha+(p+q)\pi}{n} ,$$

où $q > p$, et où $0 \leqq p \leqq n-2$, $1 \leqq q \leqq n-1$. Or, le nombre de facteurs possibles de la forme (21) étant $\frac{n(n-1)}{2}$, nous aurons évidemment

$$(22) \qquad \Delta_n = 2^{n(n-1)} . P_1^2 . P_2^2 ,$$

où P_1 et P_2 désignent les produits de tous les facteurs possibles de ces formes

$$\sin\frac{(q-p)\pi}{n} \quad \text{respectivement} \quad \sin\ldots\frac{x+(q+p)\pi}{n} ;$$

c'est-à-dire que nous aurons d'abord

$$P_1 = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n-2} \ldots \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^1 ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P_1 = \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^{n-1}\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-2}\cdots\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{1};$$

car nous avons toujours

$$\sin\frac{(n-p)\pi}{n} = \sin\frac{p\pi}{n}.$$

Multiplions ensuite les deux expressions ainsi obtenues pour P_1, il résultera, en vertu de (19),

$$P_1^2 = \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^n. \tag{23}$$

La détermination du produit P_2 est un peu plus difficile, parce qu'il faut considérer séparément les deux cas, où n est pair ou impair.

1° *n impair*, savoir $n = 2r + 1$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r + 1 \leqq 4r - 1$, où

$$s = 1, 2, 3, \ldots, 2r,$$

précisément pour r combinaisons des valeurs possibles de p et q ; on aura en effet pour s pair

$$p + q = S \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2,\ \ldots,\ \frac{s}{2}+1 \\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{s}{2}-1 \end{cases}$$

et de même, pour $s \leqq 2r - 2$,

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} q = 2r,\ 2r-1,\ 2r-2,\ \ldots,\ r+\frac{s}{2}+1 \\ p = s+1,\ s+2,\ s+3,\ \ldots,\ r+\frac{s}{2}, \end{cases}$$

tandis que le cas; où s est impair donnera de même

$$p + q = s \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2,\ \ldots,\ \frac{s+1}{2} \\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{s-1}{2} \end{cases}$$

et, pour $s \leqq 2r - 3$

$$p + q = S + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} p = 2r,\ 2r - 1,\ \ldots,\ r + \dfrac{s+1}{2} + 1 \\ q = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \dfrac{s-1}{2}, \end{cases}$$

et voilà la démonstration de notre énoncé.

Cela posé, nous aurons évidemment

$$P_2 = \pm \left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha + \pi}{n} \ldots \sin \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

d'où, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{2^{n-1}} \right)^{n-1};$$

or, la définition de α donnera

$$\sin^2 \alpha = 1 - \omega^2,$$

d'où finalement, en vertu de (22) et (23), pour *n impair*

$$\Delta_n = \frac{n^n (1 - \omega^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{(n-1)^2}}. \tag{24}$$

2° *n pair*, soit $n = 2r$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r \leqq 4r - 3$, où

$$s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2r - 1,$$

pour r respectivement $r - 1$ combinaisons de valeurs possibles de p et q, selon que s est supposé impair ou pair. On aura en effet pour $p + q = s$ les mêmes solutions que dans 1°, mais pour $p + q = s + 2r$, où $s \leqq 2r - 3$, les solutions suivantes, savoir pour s pair

$$q = 2r - 1,\ 2r - 2,\ \ldots,\ r + \frac{s}{2} + 1$$

$$p = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \frac{s}{2} - 1$$

et pour s impair

$$q = 2r - 1,\ 2r - 2,\ \ldots,\ r + \frac{s+1}{2}$$

$$p = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ r + \frac{s-1}{2},$$

ce qui donnera r respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\ldots\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\ldots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\,.\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)}\,,$$

de sorte que nous obtenons pour n *pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}\,.$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée x_0, formons les quantités x_ν suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

x_n sera une valeur approchée de la racine x, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}\,.$$