Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

Autor: Lerch, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8439

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ce qui donnera r respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\ldots\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\ldots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\,.\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)}\,,$$

de sorte que nous obtenons pour n *pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}\,.$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée x_0, formons les quantités x_ν suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

x_n sera une valeur approchée de la racine x, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}\,.$$

Pour juger l'approximation obtenue par la méthode, changeons ν en $\nu + 1$, dans l'équation (2), et retranchons avec l'équation (2) :

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) .$$

Le théorème de la moyenne ou de Rolle permet de conclure

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = (x_{\nu+1} - x_\nu) F'(\xi_\nu) , \tag{3}$$

où ξ_ν fait partie de l'intervalle $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$. Il s'ensuit

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) F'(\xi_0) F'(\xi_1) \ldots F'(\xi_{n-1}) . \tag{4}$$

Pour que la méthode soit applicable, il faut que la fonction $F'(\xi)$ soit petite aux environs de la racine cherchée.

Dans l'équation de Kepler

$$x = a + \varepsilon \sin x$$

on a

$$F'(x) = \varepsilon \cos x ;$$

la méthode des approximations successives fournira de bons résultats, si $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{10}$, ou si $|\varepsilon|$ étant toujours $\leqq 1$, la racine x est approchée de $\pm \frac{\pi}{2}$, ce qui exige que a soit approché de $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$.

2. La solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

dont on connaît une valeur approchée x_0 se ramène au cas précédent en faisant

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} .$$

Faisant $x = x_0 + h$, l'expression de la dérivée se développe en série

$$F'(x_0 + h) = - \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} h - \frac{f'''(x_0)}{2!\, f'(x_0)} h^2 - \ldots$$

d'où il suit qu'on ait sensiblement

$$F'(\xi) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} (x_0 - \xi) .$$

Cette quantité sera petite, si la racine dont il s'agit, est simple.

Remarquons que, pour déterminer des racines multiples, on ne fait pas usage de l'algorithme du plus grand commun diviseur, impossible pour des équations transcendantes, et très rarement praticables pour des équations algébriques.

S'il s'agit d'une racine de multiplicité p, on résout l'équation

$$f^{(p-1)}(x) = 0$$

dont la racine en question est une solution simple.

3. La méthode de Newton successive.

Elle consiste dans la formation des quantités

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et n'est autre que la méthode du numéro 1, pourvu que l'on fasse

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{f''(x) f(x)}{f'(x)^2}$$

et il s'ensuit d'après (4).

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_\nu) f(\xi_\nu}{f'(\xi_\nu)^2} .$$

Cette méthode est plus rapide que celle du numéro précédent, car ici le numérateur contient des facteurs $f(\xi_\nu)$ qui tendent vers zéro, tandis que les quantités $F'(\xi_\nu)$ du numéro 2 sont presque constantes ; mais cette dernière présente cet avantage que le dénominateur $f'(x_0)$ dans les formules

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}$$

est constant.

4. Une méthode pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

consiste à effectuer l'inversion d'une série de puissances. Posant en effet

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \eta \ , \tag{5}$$

le problème prend la forme

$$a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \ldots = \eta \ , \tag{5 bis}$$

et on a, d'après un algorithme connu,

$$\xi = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \ldots \ ; \tag{6}$$

il ne reste qu'à prendre $\eta = -f(x_0)$ pour avoir

$$f(x_0 + \xi) = 0 \ .$$

5. Le développement (6), borné à ses deux premiers termes, devient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0) f(x_0)^2}{f'(x_0)^3} \ ,$$

x_1 étant la nouvelle valeur approchée de la racine $x = x_0 + \xi$. Cette formule nous amène à prendre, pour employer la méthode du numéro 1,

$$\mathrm{F}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x) f(x)^2}{f'(x)^3} \ . \ x_{\nu+1} = \mathrm{F}(x_\nu) \ .$$

On a ici

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x) f'''(x)}{2f'(x)^4} f(x)^2$$

et il est manifeste que la convergence est beaucoup plus rapide que dans la méthode de Newton ; mais elle est aussi plus pénible, puisque elle emploie des valeurs de la dérivée seconde.

6. On aura une généralisation de la *regula falsi*, si l'on effectue l'inversion de l'équation

$$f(x) = y$$

au moyen de la formule d'interpolation

$$x = x_0 + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)(y - y_1) + B_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \dots$$

où l'on a posé

$$y_\nu = f(x_\nu) ,$$

en prenant pour les x_ν des quantités arbitraires aux environs de la racine cherchée x' ; en faisant $y = 0$, il vient

$$(7) \qquad x' = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 - B_3 y_0 y_1 y_2 + \dots$$

Quant aux quantités B_ν, on les calcule au moyen des équations

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + B_1(y_1 - y_0) \\ x_2 = x_0 + B_1(y_2 - y_0) + B_2(y_2 - y_0)(y_2 - y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Pour avoir une approximation commode, on choisit x_0, x_1 et calcule y_0, y_1 ; cela permet d'évaluer B_1 ; puis on fait, pour se tenir à la méthode (7),

$$x_2 = x_0 - B_1 y_0 ,$$

et on détermine $y_2 = f(x_2)$; la deuxième équation (8) donne alors aisément la valeur de B_2. Ensuite, on fait

$$x_3 = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 = x_2 + B_2 y_0 y_1 , \quad y_3 = f(x_3) ,$$

et on tire du système (8) la valeur de B_3, et ainsi de suite.

M. LERCH (Fribourg, Suisse).